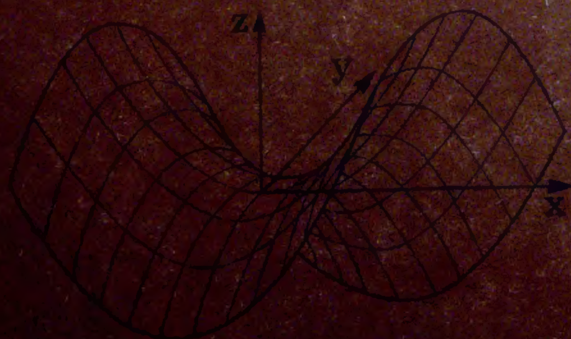
АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕАМЕТРЫЯ



Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь

ГРОДЗЕНСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ
ІМЯ ЯНКІ КУПАЛЫ

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕАМЕТРЫЯ

Дапаможнік па адпаведнаму курсу
для студэнтаў спецыяльнасці Н0101 -
Матэматыка

У 2 частках

Частка 1

Гродна 1998

УДК 514.12 (075.8)
ББК 22 151.5
А 64

Складальнік: Л.У. Кірылюк, прафесар, кандыдат педагагічных навук

Рэцэнзенты: кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт В.М. Горбузаў;

дацэнт, кандыдат педагагічных навук Г.С. Сідарчук

Рэкамендаваны саветам матэматычнага факультэта 29.10.1997 г. (пратакол №7)

А 64 АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕАМЕТРЫЯ: Дапаможнік па адпаведнаму курсу. У 2 частках. Частка 1 / Склад. Кірылюк Л.У. - Гродна: ГрДУ, 1998. - 91 с.

Першая частка дапаможніка ўключае задачы па тэмах курса "Аналітычная геаметрыя", якія разглядаюцца ў першым семестры па спецыяльнасці Н 0101 - Матэматыка. Дапаможнік ставіць мэтай забяспечыць самастойнасць працы студэнтаў.

ББК 22 151.5

Прадмова

Дапаможнік ставіць сваёй мэтай садзейнічаць выкладчыкам і студэнтам больш эфектыўна арганізаваць працу па авалоданню навыкамі рашэння задач па аналітычнай геаметрыі. Самастойнасць гэтай работы дасягаецца тым, што кожная прапанаваная задача даецца ў пяці варыянтах. Разнастайнасць задач па ўзроўню цяжкасці дае выкладчыкам магчымасць індывідуалізаваць працу студэнтаў. Не выключаецца калектыўная праца студэнтаў. Забяспечыць паспяховасць самастойнай працы павінна размяшчэнне ў пачатку кожнай тэмы кароткіх тэарэтычных звестак і прыкладаў рашэння задач. Дапаможнік складаецца з двух частах. У 1-ай размешчаны задачы па аналітычнай геаметрыі для студэнтаў матэматычнага факультэта Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы першага семестра навучання.

Пры складанні дапаможніка выкарыстана наступная літаратура:

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1979.-511с.
2. Андреев К.Г. Основной курс аналитической геометрии. - М., 1900.-610с.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.І. - М.: Просвещение, 1986.-336с.
4. Беклемешева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров Н.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - М.:Наука, 1987.-496с.
5. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. - Мн.: Университетское, 1989.-285с.
6. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. - Мн.: БГУ, 1973.-532с.
7. Коялович Б.М. Аналитическая геометрия. - М.-Петроград, 1923.-198с.
8. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч.І. - Мн.: Вышэйшая школа, 1984.-301с.
9. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1976.-384с.
10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1968.-336с.

Ніжэй прыводзім схему размеркавання задач сярод студэнтаў групы. Карыстацца схемай можна наступным чынам. Кожнаму студэнту прысвойваецца пэўны нумар. Напрыклад, студэнт мае нумар 7. Тады з задач, нумары якіх 1, 21, 41, 61 (незалежна ад таго, у якім параграфе яны размешчаны), ён рашае варыянт 2. З задач, нумары якіх 2, 22, 42, 62, ён выконвае варыянт 4 і гэтак далей.

У дапаможніку некалькі задач прапанаваны ў адным варыянце. Гэта задачы §4 № 5, §5 №№ 19, 20, 30. Мяркуецца, што яны могуць рашацца калектыўна, або будуць выкарыстаны для індывідуальнай работы.

Нумары варыянтаў задач

Нумар задачы / Нумар студэнта	1 21 41 61	2 22 42 62	3 23 43 63	4 24 44 64	5 25 45 65	6 26 46	7 27 47	8 28 48	9 29 49	10 30 50	11 31 51	12 32 52	13 33 53	14 34 54	15 35 55	16 36 56	17 37 57	18 38 58	19 39 59	20 40 60
1	1	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	1	5	4	3	2	1	5	2	3
2	2	4	3	5	1	2	4	3	5	3	2	2	4	1	5	1	2	4	1	3
3	3	5	1	4	2	3	2	5	4	3	1	3	5	1	4	2	3	3	5	1
4	4	2	5	1	2	4	3	1	2	5	4	4	2	5	1	3	4	1	2	5
5	5	3	2	4	1	5	1	2	1	4	4	5	3	2	4	1	5	3	1	2
6	1	5	4	2	3	5	1	4	5	3	2	5	1	4	3	2	5	1	3	4
7	2	4	3	1	3	4	2	5	4	5	1	4	2	3	4	5	4	2	1	5
8	3	3	5	2	4	3	4	5	3	1	2	3	1	5	5	3	3	4	5	1
9	4	2	1	3	5	2	3	1	2	4	5	2	3	4	5	4	2	5	4	5
10	5	1	2	4	3	1	5	3	1	2	3	1	5	3	3	4	1	2	3	4
11	1	3	4	2	5	1	5	2	4	1	3	5	4	1	2	3	5	1	4	2
12	2	4	5	1	5	2	4	3	1	2	5	4	3	5	1	1	4	2	5	4
13	3	1	1	5	4	3	3	1	2	5	4	3	4	2	2	4	3	5	2	3
14	4	2	3	5	1	4	2	4	3	1	5	2	1	2	1	5	2	3	4	1
15	5	1	2	3	4	5	1	2	5	4	3	1	2	3	2	5	1	4	3	2

§1. Вектары. Скалярны, вектарны і змешаны здабыткі вектараў

1. Кароткія тэарэтычныя звесткі

Задачы ў асноўным разглядаюцца ў афінным рэперы $R = \{0, \overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, \overline{\ell}_3\}$, дзе 0 – пункт прасторы, $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ - некампланарныя вектары. Калі выкарыстоўвасцца ортаўнармаваны рэпер $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, робіцца адпаведная заўвага.

– Каардынаты пункта M (x, y, z), які дзеліць накіраваны непулявы адрэзак AB у дачыненні λ, $\lambda \neq -1$:

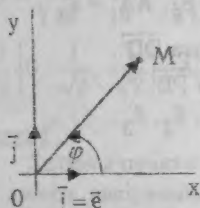
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) – каардынаты канцоў адрэзка.

– Каардынаты сярэдзіны адрэзка AB:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

– Палярныя каардынаты на плоскасці.



Рыс. 1.

Ox - палярная вось,
$\vec{e}$ - адзінкавы вектар, які задае кірунак палярнай восі (рыс.1).
$\overline{OM}$ - радыус-вектар адвольнага пункта M плоскасці; $|\overline{OM}| = \rho$, $\rho \geq 0$, φ–палярны вугал ($-\pi < \varphi \leq \pi$). ρ, φ – палярныя каардынаты пункта M.
Няхай (x, y) – прамавугольныя каардынаты пункта M у ортаўнармаваным рэперы, які прадстаўлены на рыс.1, тады формулы

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi$$

выражаюць прамавугольныя каардынаты пункта M праз яго палярныя каардынаты.

Наадварот, формулы

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

выражаюць палярныя каардынаты пункта M праз яго прамавугольныя каардынаты.

– Скалярны здабытак $\vec{a}\,\vec{b}$ вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

– Выраз скалярнага здабытку вектараў $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$ і $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$ праз каардынаты вектараў ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$): $\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

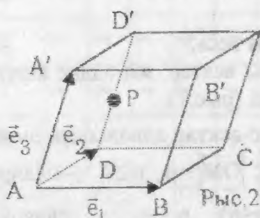
– Выраз вектарнага здабытку $[\vec{a}, \vec{b}]$ вектараў $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$ і $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$ праз каардынаты вектараў ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$):

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

– Выраз змешанага здабытку $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ вектараў $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c}\{c_1, c_2, c_3\}$ праз каардынаты вектараў ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$): $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

2. Прыклады рашэння задач

Задача 1^0.



ABCDA′B′C′D′ - паралелепіпед (рыс. 2)

$\overline{AB} = \vec{e}_1$, $\overline{AD} = \vec{e}_2$, $\overline{AA'} = \vec{e}_3$

P - сярэдзіна канта $\overline{DD'}$.

Выразіце вектар $\overline{PB'}$ праз вектары $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

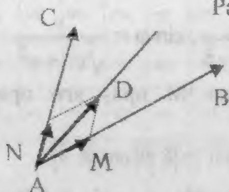
Рашэнне.

$\overline{PB'} = \overline{PD'} + \overline{D'B'}$ (рыс. 2),

$\overline{PD'} = \frac{1}{2}\overline{DD'} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = \frac{1}{2}\vec{e}_3$, $\overline{D'B'} = \overline{DB} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$. $\overline{PB'} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$.

Задача 2^0.

Дадзены два вектары $\overline{AB}\{1, 2, 3\}$ і $\overline{AC}\{-1, 3, 2\}$. Знайдзіце каардынаты вектара $\overline{AX}$, які накіраваны па бісектрысе вугла паміж вектарамі $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, калі $|\overline{AX}| = 2$ ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$).



Рыс.3.

Рашэнне.

Няхай D – адвольны пункт бісектрысы вугла паміж вектарамі $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (рыс. 3). Правядзем DM || AC і DN || AB. Тады ANDM – ромб і $|\overline{AM}| = |\overline{AN}|$, $\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{AN}$.

Шукаемы вектар $\overline{AX}$ павінен быць калінеярны як вектару $\overline{AD}$, так і

кожнаму вектару, пакіраванаму на бісектрысе. Пункт D можна выбраць так, каб вектары $\overline{AM}$ і $\overline{AN}$ былі адзінкавымі:

$\overline{AM}=\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$, $|\overline{AB}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, $\overline{AM}\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$,

$\overline{AN}=\frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}$, $|\overline{AC}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$, $\overline{AN}\left\{-\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}}\right\}$.

$\overline{AD}=\overline{AM}+\overline{AN}$, $\overline{AD}\left\{0,\ \frac{5}{\sqrt{14}},\ \frac{5}{\sqrt{14}}\right\}$.

$|\overline{AX}|=2$. Вектар $\overline{AX}$ роўны здабытку свайго адзінкавага вектара на модуль вектара $\overline{AX}$. Паколькі вектары $\overline{AX}$ і $\overline{AD}$ калінеярныя, сунакіраваныя, таму яны маюць адзін і той жа адзінкавы вектар $\frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$.

$|\overline{AD}|=\sqrt{\frac{25}{14}+\frac{25}{14}}=\sqrt{\frac{50}{14}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{14}}$,

$\frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}\left\{0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\overline{AX}=2\frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$, $\overline{AX}\left\{0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}\right\}$.

Задача 3^0.

Дадзены пункты A(3, 1, 8) і B(2, 6, 5). Знайдзіце каардынаты пункта M, які дзеліць накіраваны адрэзак AB у дачыненні λ: 1) λ=1:2, 2) λ=-2:3. Як размешчаны пункт M адносна пунктаў A і B у кожным выпадку?

Рашэнне.

Няхай x, y, z – каардынаты пункта M.

1) $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{MB}$, тады

$$x=\frac{x_1+\frac{1}{2}x_2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 2}{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3},\ y=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot 6}{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3},\ z=\frac{8+\frac{1}{2}\cdot 5}{\frac{3}{2}}=7.\ M\left(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3},\ 7\right).$$

2) $\overline{AM}=-\frac{2}{3}\overline{MB}$, $x=\frac{3-\frac{2}{3}\cdot 2}{1-\frac{2}{3}}=5$, $y=-9$, $z=14$. M(5, –9, 14).

У першым выпадку $\lambda=\frac{1}{2}>0$, вектары $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$ маюць аднолькавы кірунак, пункт M ляжыць паміж пунктамі A і B. У другім выпадку $\lambda=-\frac{2}{3}<0$,

вектары $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$ процілегла накіраваныя, пункт M знаходзіцца па-за адрэзкам AB. Пры гэтым $|\overline{AM}|=\left|-\frac{2}{3}\right||\overline{MB}|$, ці AM=$\frac{2}{3}$MB.



Рыс.4.

З гэтага вынікае, што адрэзак AM<MB (рыс.4). Пункт M размешчаны так, што пункт A ляжыць паміж пунктамі M і B.

Задача 4^0.

Вектар $\vec{a}$, які перпендыкулярны восі Ox і вектару $\vec{b}\{5, -4, 2\}$, утварае востры вугал з воссю Oy. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{a}$, калі $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $R\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Рашэнне.

Кіроўным вектарам восі Ox з'яўляецца вектар $\vec{i}\{1, 0, 0\}$. Няхай $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$. На падставе задачы вось Ox і вектар $\vec{a}$ - перпендыкулярныя, таму $\vec{a}\,\vec{i}=0$. Запішам гэтую роўнасць з дапамогай каардынат вектараў $\vec{a}$ і $\vec{i}$: $a_1 1+a_2 0+a_3 0=0$.

Адсюль, $a_1=0$.

Па ўмове $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - перпендыкулярныя і тады $\vec{a}\,\vec{b}=0$, ці $-4a_2+2a_3=0$. Адсюль $a_3=2a_2$. Па ўмове $|\vec{a}|=5$. $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, тады $\sqrt{a_2^2+4a_2^2}=\sqrt{5}$ і $a_2=\pm1$, $a_3=\pm2$.

$\vec{a}\{0, \pm1, \pm2\}$. Атрымалі два вектары $\vec{a}'\{0, 1, 2\}$ і $\vec{a}''\{0, -1, -2\}$.

Праверым, які з гэтых вектараў утварае востры вугал з воссю Oy, кіроўны вектар якой $\vec{j}\{0, 1, 0\}$.

$\vec{a}'\cdot\vec{j}=1>0$, вектары $\vec{a}'$ і $\vec{j}$ утвараюць востры вугал;

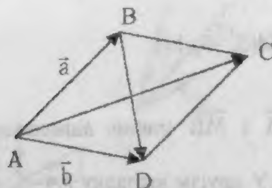
$\vec{a}''\cdot\vec{j}=-1<0$, вектары $\vec{a}''$ і $\vec{j}$ утвараюць тупы вугал.

Адк.: $\vec{a}\{0, 1, 2\}$.

Задача 5^0.

Знайдзіце даўжыні дыяганалей паралелаграма, пабудаванага на вектарах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, калі $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=60°$.

Рашэнне.



Рыс.5.

AC і BD – дыяганалі паралелаграма ABCD (рыс.5). $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AD}=\vec{b}$.

Тады $\overline{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overline{BD}=\vec{b}-\vec{a}$ і $|\overline{AC}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$; $|\overline{BD}|=\sqrt{(\vec{b}-\vec{a})^2}$.

$\vec{a}+\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}+\vec{m}-2\vec{n}=3\vec{m}-\vec{n}$;

$\vec{b}-\vec{a}=\vec{m}-2\vec{n}-2\vec{m}-\vec{n}=-(\vec{m}+3\vec{n})$.

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{(3\vec{m}-\vec{n})^2} = \sqrt{9\vec{m}^2+\vec{n}^2-6\vec{m}\vec{n}} = \sqrt{37-6|\vec{m}||\vec{n}|\cos(\vec{m},\vec{n})} =$$

$$\sqrt{37-12\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{43}.$$

$$\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{(\vec{m}+3\vec{n})^2} = \sqrt{\vec{m}^2+9\vec{n}^2+6\vec{m}\vec{n}\cos 60^\circ} = \sqrt{19}.$$

Адк.: $\sqrt{43}$, $\sqrt{19}$.

Задача 6^0.

Вектар $\vec{a}$ перпендыкулярны вектарам $\vec{b}$ і $\vec{c}$. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=4$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=45^\circ$. Вылічыце $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Рашэннс.

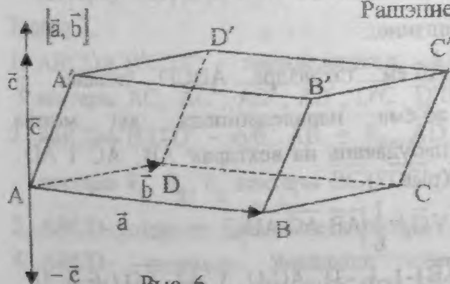
Пабудуем вектары $\overline{OB}=\vec{b}$, $\overline{OC}=\vec{c}$ і $\overline{OA}=\vec{a}$, O – адвольны пункт прасторы. На адрэзках OB, OC, OA пабудуем паралелепіпед. Ён будзе прамым паралелепіпедам. Таму $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm V$, V – аб'ём паралелепіпеда. $V=|\vec{a}|\left|\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm 12\sqrt{2}$.

Адк.: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm 12\sqrt{2}$.

Задача 7^0.

Пакажыце, што паралелаграм ABCD, пабудаваны на вектарах $\overline{AB}=\vec{a}\{4,\ 2\sqrt{6},\ 3\}$ і $\overline{AD}=\vec{b}\{3,\ -2\sqrt{6},\ 4\}$, ёсць квадрат. Знайдзіце вектар $\overline{AA'}=\vec{c}\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ так, каб паралелепіпед, пабудаваны на вектарах $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ і $\overline{AA'}$, быў кубам ($R\{0,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$).

Рашэнне.



Рыс. 6.

Паралелаграм ABCD будзе квадратам, калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуць мець роўныя модулі і будуць утвараць прамы вугал. Гэта лёгка праверыць:
$|\vec{a}|=\sqrt{16+24+9}=7$,
$|\vec{b}|=\sqrt{9+24+16}=7$,
$\vec{a}\,\vec{b}=12-24+12=0$. Паралелаграм ABCD ёсць квадрат.

Адшукаем вектар $\vec{c}$. Вектар $\vec{c}$ павінен быць перпендыкулярны вектарам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рыс.6) і $|\vec{c}|=|\vec{a}|=7$. Вектар $[\vec{a},\vec{b}]$, як вектарны здабытак вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перпендыкулярны як вектару $\vec{a}$, так і вектару $\vec{b}$. Таму

вектары $\vec{c}$ і $[\vec{a},\vec{b}]$ - калінеярныя, а каардынаты гэтых вектараў прапарцыянальныя.

Вектар $[\vec{a},\vec{b}]$ мае каардынаты

$$\left\{\begin{vmatrix} 2\sqrt{6} & 3 \\ -2\sqrt{6} & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2\sqrt{6} \\ 3 & -2\sqrt{6}\end{vmatrix}\right\} \text{ ці } \left\{14\sqrt{6},\ -7,\ -14\sqrt{6}\right\},$$

$|\vec{c}|=|\lambda|\ |[\vec{a},\vec{b}]|$, адсюль, $7=|\lambda|\cdot 49$,

$|\lambda|=\frac{1}{7}$, $\lambda=\pm\frac{1}{7}$. Атрымліваем два вектары: $\vec{c}\left\{2\sqrt{6},\ -1,\ -2\sqrt{6}\right\}$ і $\vec{c}'\left\{-2\sqrt{6},\ 1,\ 2\sqrt{6}\right\}$.

Адк.: $\left\{2\sqrt{6},\ -1,\ -2\sqrt{6}\right\}$, $\left\{-2\sqrt{6},\ 1,\ 2\sqrt{6}\right\}$.

Задача 8^0.

Вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ - узаемна перпендыкулярныя, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=4$. Знайдзіце змешаны здабытак вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

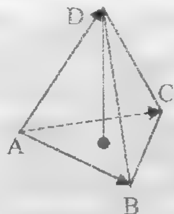
Рашэнне.

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V$, дзе V – аб`ём паралелепіпеда, пабудаванага на вектарах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, адкладзеных ад аднаго пункта. Вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ узаемна перпендыкулярныя, таму паралелепіпед з`яўляецца прамавугольным. Яго аб`ём роўны $V=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$.

Тады $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|=\pm 24$.

Задача 9^0.

ABCD – тэтраэдр, дзе A(2, -1, 2), B(1, 2, -1), C(3, 2, 1), D(-4, 2, 5). $R\{0,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$.Знайдзіце: аб`ём тэтраэдра і яго вышыню, праведзеную з вяршыні D.



Рыс.7.

Рашэнне.

Аб`ём тэтраэдра ABCD складае $\frac{1}{6}$ аб`ёма паралелепіпеда, які можна пабудаваць на вектарах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$. (рыс. 7)

$V_{тэтр}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|$;

$\overline{AB}\{-1, 3, -3\}$, $\overline{AC}\{1, 3, -1\}$, $\overline{AD}\{-6, 3, 3\}$.

$$V_{тэтр}=\frac{1}{6}\text{mod}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}|-66|=11;$$

$h_{тэтр}=\frac{3V_{тэтр}}{S_{осн}}$; $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|$; $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=6\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}$;

$\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|=\sqrt{36+16+36}=\sqrt{88}=2\sqrt{22}$, $S_{ABC}=\sqrt{22}$, $h=\frac{3\cdot 11}{\sqrt{22}}=\frac{3}{2}\sqrt{22}$.

Адк: 11 куб. адз., $h=\frac{3\cdot 11}{\sqrt{22}}=\frac{3}{2}\sqrt{22}$.

3. Задачы для самастойнага рашэння

! У задачах 8, 14 – 16, 21 – 23, 25, 26, 28 – 30, 34, 36, 38 – 43 пункты і вектары зададзены каардынатамі ў ортаўнармаваным рэперы.

Задача 1.

1. Радыусы OA, OB, OC акружнасці ўтвараюць паміж сабой вуглы ў 120°. Якім атрымаецца вектар $\overline{XU}$, калі адкладваць паслядоўна $\overline{XY}=\overline{OA}$, $\overline{YZ}=\overline{OB}$, $\overline{ZU}=\overline{OC}$.
2. Пункты A, B, C, D – вяршыні паралелаграма, O – яго цэнтр. Знайдзіце раскладанне вектараў $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ па вектарах: 1) $\vec{a}=\overline{AO}$ і $\vec{b}=\overline{BO}$; 2)$\overline{CO}$ і $\overline{DO}$.
3. ABCDEF – правільны шасцівугольнік. Знайдзіце раскладанне вектараў $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{FE}$, $\overline{ED}$ па вектарах $\vec{p}=\overline{AB}$ і $\vec{q}=\overline{AF}$.
4. Пункт O ляжыць у плоскасці трохвугольніка ABC. Знайдзіце вектары: 1) $\overline{OA}-\overline{OB}$; 2)-$\overline{OA}-\overline{OC}$; 3) $\overline{OA}+\overline{OB}-\overline{OC}$.
5. O – цэнтр правільнага шасцівугольніка ABCDEF. Знайдзіце раскладанне вектараў $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ па вектарах $\vec{p}=\overline{OE}$ і $\vec{q}=\overline{OF}$.

Задача 2.

1. ABCDA′B′C′D′ - паралелепіпед. $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AD}=\vec{b}$, $\overline{AA'}=\vec{c}$. Выразіце вектары $\overline{AC}$, $\overline{AC'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{AB'}$, $\overline{D'C}$, $\overline{D'B'}$, $\overline{D'A}$ праз вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
2. ABCDA′B′C′D′ - куб. $\overline{AB}=\vec{e}_1$, $\overline{AD}=\vec{e}_2$, $\overline{AA'}=\vec{e}_3$. Выразіце праз вектары $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ вектары $\overline{BC'}$, $\overline{DC'}$, $\overline{CD'}$, $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{A'C}$.
3. ABCD- тэтраэдр. Дакажыце, што $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AC}$.
4. ABCD- тэтраэдр. Знайдзіце сумы вектараў: 1) $\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DC}$; 2) $\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{DC}$; 3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DA}+\overline{CD}$.
5. OABC – тэтраэдр. $\overline{OA}=\vec{e}_1$, $\overline{OB}=\vec{e}_2$, $\overline{OC}=\vec{e}_3$. Выразіце праз вектары $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ наступныя вектары $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DE}$, дзе D – сярэдзіна канта OA, а E – сярэдзіна канта $\overline{BC}$, $\overline{DF}$, дзе F – пункт перасячэння медыян грані BOC.

Задача 3.

1. Дакажыце, што пры адвольным выбары пункта O роўнасць $\overline{OC}=k\overline{OA}+(1-k)\overline{OB}$, дзе k – некаторы сапраўдны лік, з'яўляецца неабходнай і дастатковай умовай таго, каб пункты A, B і C ляжалі на адной прамой.
2. Пункты M_1 і M_2 дзеляць адрэзак AB на тры роўныя часткі; Q – адвольны пункт плоскасці. Знайдзіце раскладанне вектараў $\overline{QM_1}$ і $\overline{QM_2}$ па вектарах $\vec{a}=\overline{QA}$ і $\vec{b}=\overline{QB}$.
3. У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса AD вугла A. Знайдзіце раскладанне вектара $\overline{AD}$ па вектарах $\vec{b}=\overline{AB}$, $\vec{c}=\overline{AC}$.
4. ABCD – трапецыя, у якой аснова AB у k разоў, k>1, больш асновы CD. Пункты M і N – сярэдзіны асноў. Знайдзіце раскладанне вектараў $\overline{AC}$, $\overline{MN}$ і $\overline{BC}$ па вектарах $\overline{AB}=\vec{a}$ і $\overline{AD}=\vec{b}$.
5. Дзве перпендыкулярныя прамыя, якія праходзяць праз пункт M, перасякаюць акружнасць у пунктах A, B і C, D. Дакажыце, што $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=2\overline{OM}$, дзе O – цэнтр акружнасці.

Задача 4.

1. Адрэзак AB працягнуты за пункт B так, што дачыненне даўжыні AB да даўжыні свайго працягу роўнае 4:7. Знайдзіце каардынаты новага канца, калі A(5, 4), B(6, -9).

   Адк.: $(7\frac{3}{4}, 31\frac{3}{4})$.

2. Знайдзіце каардынаты пунктаў, якія дзеляць адлегласць паміж пунктамі (5, 7) і (2, 1) на тры роўныя часткі.

   Адк.: (3, 3), (4, 5).

3. Адлегласць паміж пунктамі A і B дзеліцца пунктамі (2, 0) і (3, 1) на тры роўныя часткі. Знайдзіце каардынаты пунктаў A і B.

   Адк.: (4, 2), (1, -1).

4. Адрэзак AB працягнуты ў абедзве стораны на палову сваёй даўжыні так, што агульная даўжыня падвоілася. Знайдзіце каардынаты новых канцоў, калі A(5, 6) і B(7, 2).

   Адк.: (8, 0), (4, 8).

5. A(2, 3), B(4, -5), C(-3, -6) – каардынаты вяршынь трохвугольніка. Знайдзіце каардынаты пункта перасячэння медыян.

   Адк.: $(1, -\frac{8}{3})$.

Задача 5.

1. Праверце, ці з'яўляюцца пункты A(-1, 2, 3), B(2, -1, 1), C(1, -3, -1), D(-5, 3, 3) вяршынямі трапецыі. Знайдзіце каардынаты вектара $2\overline{AB}+\overline{CD}$.

2-5. Высветліце, ці ляжаць пункты A, B, C на адной прамой. Калі гэтыя пункты ляжаць на адной прамой, знайдзіце пункт, які ляжыць паміж дзвюма іншымі.

2. A(-3, -7, -5), B(0, -1, -2), C(2, 3, 0).
3. A(1, 2, 3), B(2, -3, 4), C(4, -13, 6).
4. A(2, -1, 3), B(-1, -5, 3), C($-\frac{5}{2}$, -7, -3).
5. A(4, -1, 3), B(2, 3, -5), C(-2, 11, -21)

Задача 6.

Пакажыце, што вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ кампланарныя. Раскладзіце вектар $\vec{c}$ па вектарах $\vec{a}$ і $\vec{в}$.

1. $\vec{a}\{-1, 3, 2\}$, $\vec{b}\{2, -3, -4\}$, $\vec{c}\{-3, 6, 6\}$.
2. $\vec{a}\{-2, 1, -2\}$, $\vec{b}\{1, 2, -3\}$, $\vec{c}\{3, -4, 7\}$.
3. $\vec{a}\{1, 1, 4\}$, $\vec{b}\{1, -2, 0\}$, $\vec{c}\{3, -3, 4\}$.
4. $\vec{a}\{3, -1, 0\}$, $\vec{b}\{0, 2, -1\}$, $\vec{c}\{-9, 7, -2\}$.
5. $\vec{a}\{3, 5, 0\}$, $\vec{b}\{1, 1, 2\}$, $\vec{c}\{5, 7, 4\}$.

Задача 7.

Пакажыце, што вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некампланарныя. Раскладзіце вектар $\vec{d}$ па вектарах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1. $\vec{a}\{2, 3, 1\}$, $\vec{b}\{-1, 2, -2\}$, $\vec{c}\{1, 2, 1\}$, $\vec{d}\{2, -2, 1\}$.
2. $\vec{a}\{1, 2, 0\}$, $\vec{b}\{3, 1, 1\}$, $\vec{c}\{4, 9, 0\}$, $\vec{d}\{0, -6, 1\}$.
3. $\vec{a}\{1, 1, -2\}$, $\vec{b}\{1, -1, 0\}$, $\vec{c}\{0, 2, 3\}$, $\vec{d}\{1, 1, 1\}$.
4. $\vec{a}\{3, -1, 2\}$, $\vec{b}\{-1, 1, -2\}$, $\vec{c}\{2, 1, -3\}$, $\vec{d}\{11, -6, 5\}$.
5. $\vec{a}\{2, 2, 3\}$, $\vec{b}\{1, 2, 3\}$, $\vec{c}\{1, 1, 1\}$, $\vec{d}\{3, 0, -2\}$.

Задача 8.

$\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{x}$, накіраванага па бісектрысе вугла AOB.

1. $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $|\vec{x}|=3$.
2. $\vec{a}\{1, 2, 2\}$, $\vec{b}\{3, 0, 4\}$, $|\vec{x}|=2\sqrt{195}$.
3. $\vec{a}\{3, 4, 0\}$, $\vec{b}\{-1, 2, -2\}$, $|\vec{x}|=1$.
4. $\vec{a}\{2, -1, -2\}$, $\vec{b}\{-3, -2, 6\}$, $|\vec{x}|=\sqrt{210}$.
5. $\vec{a}\{2, -3, 6\}$, $\vec{b}\{-1, 2, -2\}$, $|\vec{x}|=3\sqrt{42}$

Задача 9.

Дадзены каардынаты пунктаў A і B. Знайдзіце каардынаты пункта P, які дзеліць накіраваны адрэзак AB у дачыненні λ. Як размешчаны пункт P адносна пунктаў A і B? Знайдзіце каардынаты сярэдзіны адрэзка AB.

1. A(2, 3, 4), B(0, 1, -3), $\lambda=-2:1$.
2. A(2, 1, 3), B(4, 3, -5), $\lambda=2:3$.
3. A(-3, -7, -5), B(0, -1, -2), $\lambda=3:2$.
4. A(3, -2, 1), B(-5, 4, 3), $\lambda=-3$.
5. A(2, 3, 5), B(8, 6, 5), $\lambda=-1:2$.

Задача 10.

A і B – сумежныя вяршыні паралелаграма ABCD. Знайдзіце каардынаты дзвюх іншых вяршынь пры ўмове, што дыяганаль AC паралельная восі Ox, а дыяганаль BD паралельная восі Oy.

1. A(-1, 3), B(2, 1). 2. A(1, 1), B(3, 5). 3. A(1, -1), B(3, 4).
4. A(2, 4), B(5, 6). 5. A(-1, -2), B(3, 2).

Задача 11.

Дадзены вектары $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ і пункт A. ABCD – паралелаграм, які пабудаваны на гэтых вектарах. Знайдзіце каардынаты вяршыні C і цэнтра паралелаграма.

1. $\overline{AB}\{4, 1, 2\}$, $\overline{AD}\{3, -2, 5\}$, A(1, 1, 1).
2. $\overline{AB}\{3, -1, 2\}$, $\overline{AD}\{3, 5, -1\}$, A(-1, 1, 2).
3. $\overline{AB}\{-2, 4, -3\}$, $\overline{AD}\{-4, 2, -5\}$, A(3, -1, 2).
4. $\overline{AB}\{3, -2, 5\}$, $\overline{AD}\{4, 1, 2\}$, A(1, 1, 1).
5. $\overline{AB}\{-4, 2, -5\}$, $\overline{AD}\{-2, 4, -3\}$, A(3, -1, 2).

Задача 12.

Знайдзіце палярныя каардынаты пунктаў, зададзеных каардынатамі ў адпаведнай прамавугольнай сістэме каардынат.

1. $A(0, \frac{1}{2})$, B(2, 3).
2. $A(\sqrt{3}, 1)$, B(-2, 0).
3. $A(-3, 3)$, $B(1, -\sqrt{3})$.
4. $A(1, -\sqrt{3})$, B(-1, 1).
5. $A(-\sqrt{3}, -1)$, $B(3, \sqrt{3})$.

Задача 13.

Дадзены палярныя каардынаты пунктаў A і B. Вылічыце адлегласць паміж пунктамі A і B.

1. $A(8, -\frac{2}{3}\pi)$, $B(6, \frac{\pi}{3})$.
2. $A(12, \frac{4}{9}\pi)$, $B(12, -\frac{2}{9}\pi)$.
3. $A(5, \frac{\pi}{4})$, $B(8, -\frac{\pi}{12})$.
4. $A(5, \frac{\pi}{4})$, $B(4, \frac{\pi}{4})$.
5. $A(3, -\frac{\pi}{6})$, $B(4, \frac{\pi}{3})$.

Задача 14.

Знайдзіце сферычныя каардынаты (ρ, φ, θ) пунктаў, зададзеных сваімі прамавугольнымі каардынатамі.

1. A(-8, -4, 1), B(0, 1, 0).
2. A(-2, -2, -1), B(1, 0, 0).
3. A(0, -4, 3), B(0, 0, 1).
4. A(1, -1, -1), B(0, 1, 0).
5. A(-2, -2, -1), B(0, 0, 1).

Задача 15.

Знайдзіце цыліндрычныя каардынаты пунктаў па іх прамавугольных каардынатах.

1. A(3, -4, 5). 2. A(1, -1, -1). 3. A(-6, 0, 8). 4. A(1, 1, 2). 5. A(4, 3, 5).

Задача 16.

Вылічыце косінусы ўнутраных вуглоў трохвугольніка з вяршынямі A, B, C.

1. A(1, 2, 1), B(3, -1, 7), C(7, 4, -2).
2. A(1, 2, 3), B(3, 0, 4), C(2, -1, 3).
3. A(-2, 3, 1), B(-2, -1, 4), C(-2, -4, 0).
4. A(1, 2, 3), B(0, 1, 2), C(3, 4, 5).
5. A(0, -3, 6), B(-12, -3, -3), C(-9, .-3, -6).

Задача 17.

Знайдзіце даўжыні дыяганалей паралелаграма, пабудаванага на вектарах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{p}, \vec{q}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 30°$.
2. $\vec{a} = 5\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{m}, \vec{n}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$.
3. $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} + 4\vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$.
4. $\vec{a} = 2\vec{l} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{l} - \vec{k}$, $\vec{l}, \vec{k}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{\ell}, \vec{k}) = 60°$.
5. $\vec{a} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{m}, \vec{n}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.

Задача 18.

Знайдзіце вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1. $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{m}, \vec{n}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30°$.
2. $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{p}, \vec{q}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 45°$.
3. $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{m}, \vec{n}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.
4. $\vec{a} = 2\vec{u} - 5\vec{v}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$.
5. $\vec{a} = 2\vec{l} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{l} + 4\vec{k}$,, $\vec{l}, \vec{k}$ -адзінкавыя вектары, $\angle(\vec{\ell}, \vec{k}) = 60°$.

Задача 19.

Знайдзіце $\cos(\vec{a}, \vec{m})$ і $\cos(\vec{a}, \vec{n})$.

1. $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.
2. $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$.
3. $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$.
4. $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30°$.
5. $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.

Задача 20.

1. Вектар $\vec{m}$, які перпендыкулярны восі Oz і вектару $\vec{a}\{8, -15, 3\}$, утварае востры вугал з воссю Ox. Знайдзіце яго каардынаты, пры ўмове, што $|\vec{m}| = 51$.
2. $\vec{a}\{3, 2, 2\}$, $\vec{b}\{18, -22, -5\}$. $\vec{x}$ і $\vec{a}$ -перпендыкулярныя вектары і $\vec{x}$ і $\vec{b}$ -перпендыкулярныя вектары, $|\vec{x}| = 14$. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{x}$.

3. У плоскасці Oxy знайдзіце вектар $\vec{a}$, такі, што $\vec{a}$ і $\vec{b}$-перпендыкулярныя вектары, $\vec{b}\{5, -3, 4\}$ і $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

4-5. У плоскасці Oxy знайдзіце вектар $\vec{m}$, такі, што:

4) $\vec{m}$ і $\vec{n}$-перпендыкулярныя вектары, $\vec{n}\{12, -3, 4\}$ і $|\vec{m}|=|\vec{n}|$;

5) $\vec{m}$ і $\vec{b}$-перпендыкулярныя вектары, $\vec{b}\{5, -3, 4\}$ і $|\vec{m}|=|\vec{b}|$.

Задача 21.

Дакажыце, што чатырохвугольнік ABCD ёсць квадрат

1. A(4, 0, 8), B(5, 2, 6), C(3, 1, 4), D(2, -1, 6).
2. $\overline{AB}\{1, 2, -1\}$, $\overline{BC}\{-2, -1, -2\}$, $\overline{CD}\{-1, -2, 2\}$.
3. A(7, 2, 4), B(4, -4, 2), C(6, -7, 8), D(9, -1, 10).
4. A(8, 0, 16), B(10, 4, 12), C(6, 2, 8), D(4, -2, 12).
5. $\overline{AB}\{2, 4, -4\}$, $\overline{BC}\{-4, -2, -4\}$, $\overline{CD}\{-2, -4, 4\}$.

Задача 22.

Вызначце праекцыю вектара $\vec{p}$ на вось, якая мае кірунак вектара $\vec{q}$.

1. $\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=5\vec{i}-12\vec{j}$.
2. $\vec{p}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
3. $\vec{p}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{q}=3\vec{i}+4\vec{j}$.
4. $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{q}=3\vec{i}+4\vec{k}$.
5. $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Задача 23.

Сіла $\vec{R}$ разложана па трох узаемна перпендыкулярных напрамках, адзін з якіх зададзены вектарам $\vec{a}$. Знайдзіце складальную сілы $\vec{R}$ у напрамку вектара $\vec{a}$.

1. $\vec{R}=\vec{i}-8\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.
2. $\vec{R}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$.
3. $\vec{R}=\vec{i}-7\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.
4. $\vec{R}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
5. $\vec{R}=\vec{i}-8\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

Задача 24.

1. Якой умове павінны здавальняць вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, каб мела месца роўнасць $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$?
2. Дакажыце, што $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ – правільная роўнасць, і высветліце яе геаметрычны сэнс.
3. Пры якім дадатным значэнні параметра ℓ вектары $\vec{a}=\vec{p}-\vec{q}$ і $\vec{b}=\ell\vec{p}+2\vec{q}$ маюць аднолькавую даўжыню, калі $|\vec{p}|=\sqrt{3}$, $|\vec{q}|=\frac{1}{2}$, $\vec{p}$ і $\vec{q}$-перпендыкулярныя вектары?
4. Даўжыня гіпатэнузы AB трохвугольніка ABC роўная с. Вылічыце суму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

5. Дакажыце, што дыяганалі ромба ўзаемна перпендыкулярныя (выкарыстайце скалярны здабытак вектараў).

Задача 25.

1. Вектар $\vec{a}$ утварае з восямі Ox і Oz адпаведна вуглы 60° і 45°. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{a}$, калі $|\vec{a}|=4$.
2. Знайдзіце вуглы, якія вектар $\vec{a}\{5, -\sqrt{2}, 3\}$ утварае з восямі Ox, Oy, Oz.
3. Вектар $\vec{a}$ утварае з вектарам $\vec{i}$ і $\vec{j}$ адпаведна вуглы 120° і 135°. Знайдзіце вугал, які вектар $\vec{a}$ утварае з вектарам $\vec{k}$.
4. Дыяганаль AC′ прамавугольнага паралелепіпеда ABCDA′B′C′D′ утварае з кожным з двух кантаў, якія выходзяць з вяршыні A, вугал у 60°. Які вугал яна ўтварае з трэцім кантам, які выходзіць з пункта A?
5. Знайдзіце вугал паміж бісектрысамі плоскіх вуглоў трохграннага вугла, канты якога ўзаемна перпендыкулярныя.

Задача 26.

1. $\vec{a}\{2, -1, 5\}$, $\vec{b}\{3, 1, 1\}$. Знайдзіце вектар $\vec{x}$, які здавальняе ўмове: $\vec{x}\,\vec{k}=0$, $\vec{x}\,\vec{a}=1$, $\vec{x}\,\vec{b}=4$.
2. Знайдзіце вектар $\vec{x}$, які калінеярны вектару $\vec{a}\{1, 1, -2\}$ і здавальняе ўмове $\vec{x}\,\vec{a}=3$.
3. Дадзены тры вектары $\vec{a}\{1, 2, -3\}$, $\vec{b}\{5, 1, 2\}$ і $\vec{c}\{-3, 0, 1\}$. Знайдзіце вектар $\vec{x}$, які адначасова здавальняе ўмовам: $\vec{a}\,\vec{x}=-4$, $\vec{b}\,\vec{x}=5$, $\vec{c}\,\vec{x}=2$.

4-5. $\vec{a}\{8, 4, 1\}$, $\vec{b}\{2, -2, 1\}$. Знайдзіце вектар $\vec{x}$, які кампланарны вектарам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і перпендыкулярны вектару $\vec{a}$, $|\vec{x}|=|\vec{a}|$ і $\angle(\vec{x}, \vec{b})$-тупы.

Задача 27.

1. Дадзены вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Прадстаўце вектар $\vec{b}$ у выглядзе сумы двух вектараў $\vec{x}$ і $\vec{y}$ так, каб вектар $\vec{x}$ быў калінеярны вектару $\vec{a}$, а вектар $\vec{y}$ быў артаганальны вектару $\vec{a}$. Адк.: $\vec{b}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$.
2. $\vec{a}$ і $\vec{b}$-некалінеярныя вектары. Знайдзіце вектар $\vec{x}$, кампланарны вектарам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які здавальняе ўмове $\vec{a}\,\vec{x}=1$, $\vec{b}\,\vec{x}=0$. Адк.: $\vec{x}=\dfrac{\vec{b}^2\vec{a}-(\vec{a}\,\vec{b})\vec{b}}{\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\,\vec{b})^2}$.
3. AD, BE, CF-медыяны трохвугольніка ABC. Знайдзіце суму $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$. Адк.: 0.
4. Дадзены вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдзіце вектар $\vec{c}$, які з'яўляецца артаганальнай праекцыяй вектара $\vec{b}$ на прамую, якой задае вектар $\vec{a}$. Адк.: $\vec{c}=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$.

5. Дадзены вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдзіце вектар $\vec{n}$, які з'яўляецца ортаганальнай праекцыяй вектара $\vec{a}$ на плоскасць, перпендыкулярную вектару $\vec{b}$.

Адк.: $\vec{n} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b}$.

Задача 28.

Знайдзіце каардынаты і модуль вектара $[\vec{a}, \vec{b}]$.

1. $\vec{a}\{2, 1, 0\}$, $\vec{b}\{3, 2, 1\}$.
2. $\vec{a}\{3, 1, -1\}$, $\vec{b}\{4, -2, 3\}$.
3. $\vec{a}\{1, -1, 1\}$, $\vec{b}\{-8, 4, 3\}$.
4. $\vec{a}\{2, 0, 1\}$, $\vec{b}\{-7, 6, 4\}$.
5. $\vec{a}\{0, 1, 0\}$, $\vec{b}\{-8, 2, 6\}$.

Задача 29.

Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.

1. A(-2, 1, 0), B(0, -5, 1), C(3, 2, -6).
2. A(4, -1, 3), B(2, 1, -1), C(2, -2, -4).
3. A(1, -1, 2), B(2, 1, 2), C(1, 1, 4).
4. A(2, -4, -3), B(5, -6, 0), C(-1, 3, -3).
5. A(-3, -5, 6), B(2, 1, -4), C(0, -3, -1).

Задача 30.

Знайдзіце даўжыню вышыні трохвугольніка ABC, якая праведзена з вяршыні C на старану AB.

1. A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6).
2. A(3, 2, -3), B(5, 1, -1), C(1, -2, 1).
3. A(4, 2, 5), B(0, 7, 1), C(0, 2, 7).
4. A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1).
5. A(5, 2, -1), B(1, -3, 4), C(-2, 1, 3).

Задача 31.

1. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Вылічыце $\left|[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}]\right|$.
2. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Вылічыце $\left|[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]\right|$.
3. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$. Вылічыце $\left|[3\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]\right|$.
4. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Вылічыце $\left|[3\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}]\right|$.
5. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Вылічыце $\left|[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}]\right|$.

Задача 32.

1. Дадзены: $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=15$, $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|=72$. Вылічыце $\vec{a}\vec{b}$.
2. Дадзены: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\vec{b}=12$. Вылічыце $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$.
3. Дадзены: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|=72$. Вылічыце $\vec{a}\vec{b}$.
4. Дадзены: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\vec{b}=-6$. Вылічыце $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$.
5. Дадзены: $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|=20$. Вылічыце $\vec{a}\vec{b}$.

Задача 33.

Вектар $\vec{\vartheta}$ перпендыкулярны вектарам $\vec{p}$ і $\vec{q}$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \varphi$. Вылічыце $\vec{p}\vec{q}\vec{\vartheta}$.

1. $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $|\vec{\vartheta}|=3$, $\varphi=30°$.

2. $|\vec{p}|=|\vec{q}|=2$, $|\vec{\vartheta}|=1$, $\varphi=45°$.

3. $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=4$, $|\vec{\vartheta}|=4$, $\varphi=60°$.

4. $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=3$, $|\vec{\vartheta}|=3$, $\varphi=30°$

5. $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\vartheta}|=3$, $\varphi=120°$.

Задача 34.

Пераканайцеся, што вектары $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$ і $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, якія адкладзены ад аднаго пункта, можна ўзяць у якасці двух кантаў куба, і знайдзіце вектар $\vec{c}\{c_1, c_2, c_3\}$, якому адпавядае трэці кант куба.

1. $\vec{a}\{4, 3, 0\}$, $\vec{b}\{3, -4, 0\}$. Адк.: $\vec{c}\{0, 0, 5\}$, $\vec{c}'\{0, 0, -5\}$.
2. $\vec{a}\{-12, 0, 5\}$, $\vec{b}\{5, 0, 12\}$. Адк.: $\vec{c}\{0, 13, 0\}$, $\vec{c}'\{0, -13, 0\}$.
3. $\vec{a}\{1, 2, 2\}$, $\vec{b}\{2, -2, 1\}$. Адк.: $\vec{c}\{2, 1, -2\}$, $\vec{c}'\{-2, -1, 2\}$.
4. $\vec{a}\{3\sqrt{2}, -\sqrt{7}, 0\}$, $\vec{b}\{\sqrt{7}, 3\sqrt{2}, 0\}$. Адк.: $\vec{c}\{0, 0, 5\}$, $\vec{c}'\{0, 0, -5\}$.
5. $\vec{a}\{3, 2, 2\sqrt{3}\}$, $\vec{b}\{2, 3, -2\sqrt{3}\}$. Адк.: $\vec{c}\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1\}$, $\vec{c}'\{2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, -1\}$.

Задача 35.

Вылічыце плошчу паралелаграма, дыяганалі якога вызначаюць вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1. $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-5\vec{n}$, $|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=45°$.
2. $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=3\vec{m}-2\vec{n}$, $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=1$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=60°$.
3. $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=-3\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=|\vec{n}|=4$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=120°$.
4. $\vec{a}=\vec{m}-3\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{m}+3\vec{n}$, $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=2$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=30°$.
5. $\vec{a}=2\vec{m}-4\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=90°$.

Задача 36.

1. Вектар $\vec{x}$, перпендыкулярны вектарам $\vec{a}\{2, -3, 1\}$ і $\vec{b}\{1, -2, 3\}$, здавальняе ўмове $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{x}$.
2. Вектар $\vec{x}$, перпендыкулярны вектарам $\vec{a}\{2, 3, -1\}$ і $\vec{b}\{1, -1, 3\}$, здавальняе ўмове $\vec{x}(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})=51$. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{x}$.
3. Вектар $\vec{x}$, перпендыкулярны вектарам $\vec{a}\{2, 3, -1\}$ і $\vec{b}\{1, -1, 3\}$, утварае з вектарам $\vec{i}$ тупы вугал. $|\vec{x}|=\sqrt{138}$. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{x}$.
4. Вектар $\vec{x}$, перпендыкулярны вектарам $\vec{a}\{4, -2, -3\}$ і $\vec{b}\{0, 1, 3\}$, утварае з воссю Oy тупы вугал. $|\vec{x}|=26$. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{x}$.
5. Вектар $\vec{m}$, перпендыкулярны восі Oz і вектару $\vec{a}\{8,-15, 3\}$, утварае востры вугал з воссю Ox. $|\vec{m}|=51$. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{m}$.

Задача 37.

Вылічыце плошчу паралелаграма, дыяганалі якога вызначаюцца вектарамі $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

1. $\vec{p}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{q}=\vec{m}+5\vec{n}$, калі $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=30°$.

2. $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-5\vec{b}$, калі $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45°$.

3. $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$, калі $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$.

4. $\vec{p}=5\vec{l}+\vec{m}$, $\vec{q}=2\vec{l}-3\vec{m}$, калі $|\vec{l}|=$, $|\vec{m}|=3$, $\angle(\vec{\ell},\vec{m})=45°$.

5. $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$, калі $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$.

Задача 38.

Вылічыце змешаныя здабыткі вектараў.

1. $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k};\ \vec{k}\,\vec{j}\,\vec{i}$. 2. $\vec{i}\,\vec{k}\,\vec{j};\ \vec{k}\,\vec{i}\,\vec{j}$. 3. $\vec{j}\,\vec{i}\,\vec{k};\ \vec{k}\,\vec{j}\,\vec{i}$. 4. $\vec{i}\,\vec{k}\,\vec{j};\ \vec{k}\,\vec{i}\,\vec{j}$. 5. $\vec{k}\,\vec{j}\,\vec{i};\ \vec{i}\,\vec{k}\,\vec{j}$.

Задача 39.

Высветліце, левай ці правай з'яўляецца тройка вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{k}$.
2. $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}-\vec{j}$.
3. $\vec{a}=\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$.
4. $\vec{a}=-5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=-3\vec{j}+2\vec{k}$.
5. $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{k}$.

Задача 40.

Высветліце, ці кампланарныя вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1. $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=9\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}$.

2. $\vec{a}=9\vec{i}-11\vec{j}+13\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

3. $\vec{a}=4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=98\vec{i}-22\vec{j}+26\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

4. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=6\vec{i}-2\vec{j}$.

5. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$.

Задача 41.

Вылічыце аб'ём і вышыню, праведзеную з пункта D, паралелепіпеда, які пабудаваны на вектарах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

1. $\overrightarrow{AB}\{3, 1, 2\}$, $\overrightarrow{AC}\{-1, 2, -3\}$, $\overrightarrow{AD}\{6, 1, -1\}$.
2. $\overrightarrow{AB}\{4, 0, 3\}$, $\overrightarrow{AC}\{2, -1, 2\}$, $\overrightarrow{AD}\{5, -1, 2\}$.
3. $\overrightarrow{AB}\{0, 0, 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{5, 0, 2\}$, $\overrightarrow{AD}\{3, -3, 6\}$.
4. $\overrightarrow{AB}\{5, 6, -1\}$, $\overrightarrow{AC}\{3, 1, 2\}$, $\overrightarrow{AD}\{4, -1, 2\}$.
5. $\overrightarrow{AB}\{3, -1, 2\}$, $\overrightarrow{AC}\{6, 3, 1\}$, $\overrightarrow{AD}\{-1, -3, 2\}$.

Задача 42.

$ABCA'B'C'$-трохвугольная прызма. Вектары $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ вызначаюць аснову, а вектар $\overline{AA'}$ накіраваны па бакавому канту прызмы. Вылічыце: аб'ём прызмы, плошчу асновы, вышыню прызмы і вугал паміж кантамі $B'C'$ і AA'.

1. $\overrightarrow{AB}\{0, 1, -1\}$, $\overrightarrow{AC}\{2, -1, 4\}$, $\overrightarrow{AA'}\{-3, 2, 2\}$.

2. $\overrightarrow{AB}\{4, 0, 3\}$, $\overrightarrow{AC}\{2, 1, 2\}$, $\overrightarrow{AA'}\{-3, -2, 5\}$.
3. $\overrightarrow{AB}\{2, 0, 0\}$, $\overrightarrow{AC}\{3, 4, 0\}$, $\overrightarrow{AA'}\{3, 4, 2\}$.
4. $\overrightarrow{AB}\{-2, 4, 6\}$, $\overrightarrow{AC}\{1, -4, 8\}$, $\overrightarrow{AA'}\{-1, -5, 4\}$.
5. $\overrightarrow{AB}\{-3, 3, 0\}$, $\overrightarrow{AC}\{-4, 0, 4\}$, $\overrightarrow{AA'}\{-6, -1, 1\}$.

Задача 43.

Вылічыце аб'ём тэтраэдра $A_1A_2A_3A_4$ і яго вышыню, праведзеную з пункта A_4 у наступных выпадках:
1. $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, -3)$.
2. $A_1(-4, 2, 6)$, $A_2(2, -3, 0)$, $A_3(-10, 5, 8)$, $A_4(-5, 2, -4)$.
3. $A_1(7, 2, 4)$, $A_2(7, -1, -2)$, $A_3(3, 3, 1)$, $A_4(-4, 2, 1)$.
4. $A_1(2, 1, 4)$, $A_2(-1, 5, -2)$, $A_3(7, -3, 2)$, $A_4(-6, -3, 6)$.
5. $A_1(-1, -5, 2)$, $A_2(-6, 0, -3)$, $A_3(-3, 6, -3)$, $A_4(-10, 6, 7)$.

Задача 44.

Вектар $\vec{\vartheta}$ перпендыкулярны вектарам $\vec{p}$ і $\vec{q}$, $\angle(\vec{p}, \vec{q})=\varphi$. Вылічыце $\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{\vartheta}$.

1. $\varphi=30°$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $|\vec{\vartheta}|=3$.
2. $\varphi=45°$, $|\vec{p}|=|\vec{q}|=2$, $|\vec{\vartheta}|=1$.
3. $\varphi=60°$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=|\vec{\vartheta}|=4$.
4. $\varphi=30°$, $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=|\vec{\vartheta}|=3$.
5. $\varphi=120°$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\vartheta}|=3$.

§2. Прамая лінія на плоскасці

1. Кароткія тэарэтычныя звесткі

– Раўнанні прамой

а) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{p}t$ - вектарнае параметрычнае раўнанне прамой, $\vec{r}$-радыус-вектар адвольнага пункта M прамой, $\vec{r}_0$-радыус-вектар дадзенага пункта M_0 прамой, $\vec{p}$-кіроўны вектар прамой, t – параметр адвольнага пункта прамой ($t \in \mathbb{R}$);

б) $x = x_0 + p_1t$, $y = y_0 + p_2t$ - параметрычныя раўнанні прамой; x, y – бягучыя каардынаты адвольнага пункта M прамой, x_0, y_0 – каардынаты дадзенага пункта M_0 прамой, p_1, p_2 – каардынаты кіроўнага вектара $\vec{p}$ прамой;

в) $\dfrac{x - x_0}{p_1} = \dfrac{y - y_0}{p_2}$ - кананічнае раўнанне прамой;

г) $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$ - раўнанне прамой, якая праходзіць праз два пункты $M_0(x_0,y_0)$ і $M_1(x_1,y_1)$;

д) $Ax+By+C=0$ – агульнае раўнанне прамой, $A^2+B^2 \neq 0$, $\vec{p}\{-B,A\}$ – кіроўны вектар прамой, $\vec{n}\{A,B\}$ – галоўны вектар прамой. У ортаўнармаваным

рэперы $\bar{n}$ і $\bar{p}$ - перпендыкулярныя вектары і $\bar{n}$ называецца нармальным вектарам прамой, x, y – каардынаты адвольнага пункта прамой;

е) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - раўнанне прамой "у адрэзках", A(a, 0),B(0, b) – пункты перасячэння прамой з восямі каардынат;

ж) $y = kx + b$ - раўнанне прамой з вуглавым каэфіцыентам k, $k=\frac{p_2}{p_1}$,

$\bar{p}\{p_1,p_2\}$, $p_1 \neq 0$ – кіроўны вектар прамой, B(0, b) – пункт перасячэння прамой з воссю ардынат;

$y - y_0 = k(x - x_0)$ - раўнанне прамой з вуглавым каэфіцыентам k, $M_0(x_0,y_0)$ – пункт, які ляжыць на прамой;

з) $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ - нармальнае раўнанне прамой, φ-вугал паміж дадатнай паўвоссю абсцыс і прамой, якая праходзіць праз пачатак каардынат і перпендыкулярная да дадзенай прамой, p-адлегласць ад пачатку каардынат да прамой (p≥0) ($R=\{0,\bar{i},\bar{j}\}$).

– Адлегласць ад пункта M_0, да прамой d: Ax+By+C=0 у рэперы $R=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$:

$$\rho(M_0, d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

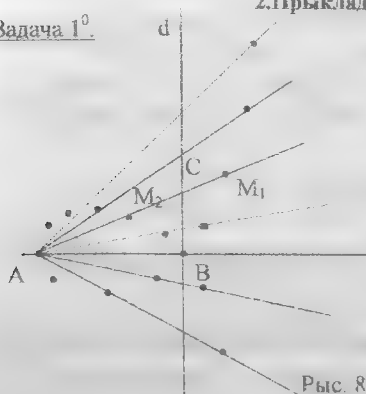
– Вугал паміж дзвюма прамымі ($R=\{0,\bar{i},\vec{j}\}$):

а) d_1: $A_1x+B_1y+C=0$, d_2: $A_2x+B_2y+C=0$; $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$;

б) d_1: $y=k_1x+b_1$, d_2: $y=k_2x+b_2$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

2.Прыклады рашэння задач

Задача 1[0].



Рыс. 8.

Дадзены пункт A і прамая d на адлегласці AB=a ад пункта A. Вакол пункта A у плоскасці, вызначанай пунктам A і прамой d, паварочваецца паўпрамая, якая перасякае прамую d у зменным пункце C. На гэтай паўпрамой па абодва бакі ад пункта C адкладваюцца роўныя адрэзкі $CM_1=CM_2=BC$ (рыс.8). Выберыце ортаўнармаваны рэпер і складзіце раўнанне лініі, якую апісваюць

пункты M_1 і M_2 пры павароце паўпрамой.

Рашэнне.



Рыс. 9.

Выбярэм ортаўнармаваны рэпер так, каб вось абсцыс супадала з прамой AB, а яе кірунак задаваў вектар $\overline{AB}$. Пачатак каардынат сумясцім з пунктам A (рыс.9). Тады пункт O мае каардынаты (0, 0); пункт B – (a, 0); паколькі як пункт M_1 зменны, яго каардынаты абазначым (x, y). З падобнасці трохвугольнікаў OBC і $OM_1'M_1$ маем залежнасць: $\frac{y}{BC}=\frac{x}{a}$,

ці $BC=\frac{ay}{x}$ $(x\neq 0)$. Тады пункт C мае каардынаты $(a,\frac{ay}{x})$. Адлегласць ρ пункта M_1 да C роўная $\rho(C_1, M_1)=\sqrt{(x-a)^2+\left(y-\frac{ay}{x}\right)^2}$.

$BC=CM_1$, тады $\sqrt{(x-a)^2+\left(y-\frac{ay}{x}\right)^2}=\frac{ay}{x}$. Пры ўмове, што $x\neq 0$, атрымлівам раўнанне шукаемай лініі $(x-a)^2\left(x^2+y^2\right)-a^2y^2=0$ (1). Відавочна, што каардынаты пунктаў, якія не здавальняюць умове задачы, не здавальняюць гэтаму раўнанню. Лінія, якая задаецца раўнаннем (1), называецца страфоідай.

Калі ў раўнанні (1) x=0, тады y=0, (0,0)-гэта каардынаты пункта 0 (ці A), значыць, пункт A ляжыць на страфоідзе.

Заўвага. У якасці зменнага пункта лініі мы бралі пункт M_1. Тое самае раўнанне атрымаем, калі ў якасці зменнага пункта лініі возьмем пункт M_2.

Задача 2^0.

Напішыце раўнанне прамой, якая праходзіць праз пункт A(1,-3) і паралельная прамой 2x-3y-5=0. Запішыце раўнанні гэтай прамой у розных выглядах.

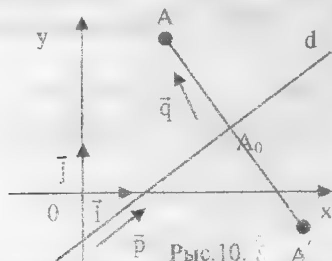
Рашэнне.

Дадзеная і шукаемая прамыя павінны быць паралельнымі, а, значыць, іх кіроўныя вектары павінны быць калінеярнымі. $\bar{p}\{3,2\}$ – кіроўны вектар дадзенай прамой, тады вектар $\lambda\bar{p}\{3\lambda,2\lambda\}$, $\lambda\neq 0$ – кіроўны вектар шукаемай прамой. Раўнанне шукаемай прамой можна запісаць у кананічнай форме $\frac{x-1}{3\lambda}=\frac{y+3}{2\lambda}$, ці $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}$.

іншыя выгляды раўнанняў гэтай прамой: 2x-3y-11=0 – агульнае раўнанне прамой, x=1+3t, y=-3+2t – параметрычныя раўнанні, $y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ - раўнанне прамой з вуглавым каэфіцыентам, $\frac{x}{\frac{11}{2}}+\frac{y}{-\frac{11}{3}}=1$ - раўнанне прамой "у адрэзках".

Задача 3^0.

Знайдзіце каардынаты пункта, сіметрычнага пункту A(4, 3) адносна прамой 2x-3y-6=0 ($R=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$).



Рыс.10.

Рашэнне.

Пункт A' павінен: 1) ляжаць на прамой, перпендыкулярнай дадзенай прамой d, 2) адрэзак AA' павінен дзяліцца дадзенай прамой d папалам (рыс. 10). AA' і d – перпендыкулярныя прамыя, $A_0\in d$, $AA_0=A_0A'$.

Адсюль: $\vec{p}\{3,2\}$, $\vec{q}$ і $\vec{p}$ - перпендыкулярныя вектары, таму $\vec{q}\{-2,3\}$.

Раўнанне прамой AA': $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-3}{3}$ ці $3x+2y-18=0$. A_0 – пункт перасячэння прамых d і AA', яго каардынаты знаходзім з сістэмы: $\begin{cases}3x+2y-18=0,\\2x-3y-6=0.\end{cases}$ $A_0\left(\frac{66}{13},\frac{18}{13}\right)$. Тады з роўнасцей $x_{A_0}=\frac{x_A+x_{A'}}{2}$, $y_{A_0}=\frac{y_A+y_{A'}}{2}$ знаходзім $x_{A'}$ і $y_{A'}$.

Адк.: $A'\left(\frac{80}{13},-\frac{3}{13}\right)$.

Задача 4^0.

Праз пункт перасячэння прамых x+y-1=0 і 2x-5y+10=0 праведзена прамая, перпендыкулярная прамой 2x-y-4=0. Знайдзіце раўнанне гэтай прамой ($R=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$.).

Рашэнне.

Спосаб 1. Можна знайсці пункт M_0 перасячэння дадзеных прамых і праз пункт M_0, правесці прамую, перпендыкулярную прамой 2x-y-4=0.

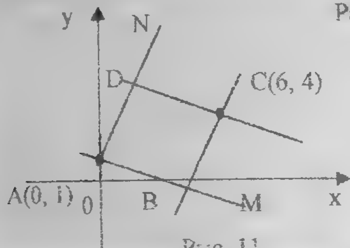
Спосаб 2. Выкарыстаем паняцце пучка прамых, якія зададзены прамымі x+y-1=0 і 2x-5y+10=0. Раўнанне пучка: $\alpha(x+y-1)+\beta(2x-5y+10)=0$, дзе α і β - адначасова не нулі. Гэтае раўнанне перапішам у выглядзе: $(\alpha+2\beta)x+(\alpha-5\beta)y+(-\alpha+10\beta)=0$, дзе α і β адначасова не нулі. Шукаемая прамая павінна быць перпендыкулярная прамой 2x-y-4=0, а гэта значыць, што іх кіроўныя вектары $\vec{p}\{1,2\}$ і $\vec{q}\{-\alpha+5\beta;\alpha+2\beta\}$ павінны быць

перпендыкулярнымі, іх скалярны здабытак павінен быць роўны нулю. $-\alpha + 5\beta + 2\alpha + 4\beta = 0$, ці $\alpha + 9\beta = 0$, $\alpha = -9\beta$.

Раўнанне прамой запішацца $-9\beta(x + y - 1) - \beta(2x - 5y + 10) = 0$. $\beta \neq 0$ (калі $\beta=0$, тады і $\alpha=0$). $7x+14y-19=0$ – раўнанне прамой, перпендыкулярнай дадзенай прамой. Адк.: $7x+14y-19=0$.

Задача 5^0.

Запішыце сістэму няроўнасцей, якой здавальняюць каардынаты пунктаў унутранага абсягу прамавугольніка, зададзенага наступнымі ўмовамі: адна старана прамавугольніка ляжыць на прамой $x+3y-3=0$, а дзве яго вяршыні знаходзяцца ў пунктах (0,1) і (6,4) ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$).



Рыс. 11.

Рашэнне.

Каб выканаць патрабаванне задачы, неабходна, перш за ўсё, знайсці раўнанні старон прамавугольніка. Дадзеная прамая AM праходзіць праз пункт A(0,1) і не праходзіць праз пункт (6,4).

Правядзем праз пункт A прамую AN, перпендыкулярную прамой AM. Яе раўнанне: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{3}$ ці $3x - y + 1 = 0$. Пункт (6,4) не ляжыць на гэтай прамой, таму ён з'яўляецца вяршыняй прамавугольніка, процілеглай вяршыні A (рыс.11). Прамая DC паралельная прамой AB, яе раўнанне: $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-4}{1}$ ці $x + 3y - 18 = 0$. Прамыя AD і BC – паралельныя прамыя.

Таму CB: $\frac{x-6}{1} = \frac{y-4}{3}$, ці $3x - y - 14 = 0$.

Раўнанні старон прамавугольніка:

AB: $x + 3y - 3 = 0$, CD: $x + 3y - 18 = 0$,

BC: $3x - y - 14 = 0$, AD: $3x - y + 1 = 0$.

Вызначым няроўнасці, якім здавальняюць каардынаты пунктаў унутранага абсягу прамавугольніка. Адносна прамой AB гэты абсяг знаходзіцца па той бок, па які ляжыць пункт C.

$P(x, y) = x + 3y - 3$, $P(6, 4) = 6 + 12 - 3 = 15 > 0$, $x + 3y - 3 > 0$. (1)

Для прамой BC і пункта A маем:

$P_1(x, y) = 3x - y - 14$, $P_1(0, 1) = 0 - 1 - 14 = -15 < 0$, $3x - y - 14 > 0$. (2)

Для прамой CD і пункта A маем:

$P_2(x, y) = x + 3y - 18$, $P_2(0, 1) = 3 - 18 = -15 < 0$, $x + 3y - 18 > 0$. (3)

Для прамой AD і пункта C маем:

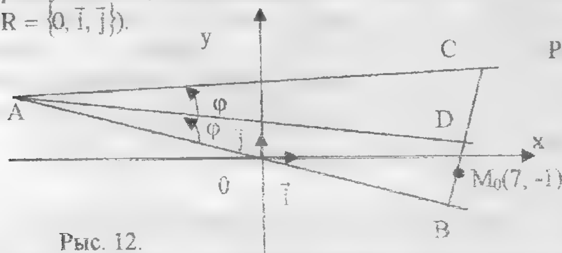
$P_3(x, y) = 3x - y + 1$, $P_3(6, 4) = 18 - 4 + 1 = 15 > 0$, $3x - y + 1 > 0$. (4)

Унутраны абсяг прамавугольніка задаецца няроўнасцямі:

$$\begin{cases} x + 3y - 3 > 0, \\ 3x - y - 14 < 0, \\ x + 3y - 18 < 0, \\ 3x - y + 1 > 0. \end{cases}$$

Задача 6^0.

Прамая AB: $x+3y=0$ з'яўляецца бакавой стараной раўнабедранага трохвугольніка ABC, прамая $x+12y-18=0$ – бісектрыса AD унутранага вугла A. Знайдзіце раўнанні другой бакавой стараны AC і асновы BC трохвугольніка, калі вядома, што пункт $M_0(7,-1)$ ляжыць на прамой BC ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$).



Рыс. 12.

Рашэнне.

Абазначым вугал BAD праз φ (рыс. 12.) Тады вугал DAC таксама роўны φ. $tg\varphi = \dfrac{k_{AD} - k_{AB}}{1 + k_{AD} \cdot k_{AB}}$,

дзе k_{AD} і k_{AB} - вуглавыя каэфіцыенты прамых AD і AB.

$$k_{AD} = -\frac{1}{12}; \quad k_{AB} = -\frac{1}{3}; \quad tg\varphi = \frac{9}{37} = tg(\angle DAC) = \frac{k_{AC} - k_{AD}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AD}} = \frac{12k_{AC} + 1}{12 - k_{AC}},$$

$$\frac{12k_{AC} + 1}{12 - k_{AC}} = \frac{9}{37}, \text{ адсюль, } k_{AC} = \frac{71}{453}.$$

Раўнанне прамой AC: $y = \dfrac{71}{453}x + b$. $A \in AC$, каардынаты пункта A вызначым з сістэмы: $\begin{cases} x + 3y = 0, \\ x + 12y - 18 = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x = -6, \\ y = 2. \end{cases}$ A(-6, 2). Раўнанне AC:

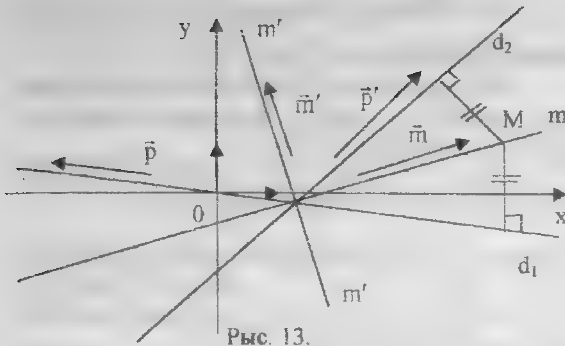
$y = \dfrac{71}{453}x + \dfrac{444}{151}$, ці $71x - 453y + 1332 = 0$. Раўнанне асновы BC знаходзім з умовы: BC і AD – перпендыкулярныя прамыя, $M_0 \in BC$, $M_0(7, -1)$. Кіроўны вектар прамой AD $\vec{p}_{AD}\{-12, 1\}$ з'яўляецца нармальным вектарам прамой BC; тады раўнанне прамой BC: $-12x+y+C=0$. Прамая BC праходзіць праз пункт M_0, таму $c=85$. Раўнанне прамой BC: $12x-y-85=0$.

Адк.: $71x-453y+1332=0$, $12x-y+85=0$.

Задача 7^0.

Знайдзіце раўнанні бісектрыс вуглоў, утвораных прамымі $x+7y=0$ (d_1) і $x-y-4=0$ (d_2). Вызначыце раўнанне бісектрысы тупога вугла ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$).

Рашэнне.



Рыс. 13.

Няхай m і m′ – бісектрысы вугла паміж прамымі d_1 і d_2 (рыс. 13). Любы пункт кожнай з бісектрыс роўнааддалены ад прамых d_1 і d_2, гэта значыць:

$\rho(M_0,d_1)=\dfrac{|x_0+7y_0|}{\sqrt{50}}$,

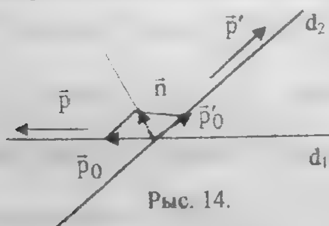
$\rho(M_0,d_2)=\dfrac{|x_0-y_0-4|}{\sqrt{2}}$, $\rho(M_0,d_1)=\rho(M_0,d_2)$ і $\dfrac{|x_0+7y_0|}{\sqrt{50}}=\dfrac{|x_0-y_0-4|}{\sqrt{2}}$. З прычыны таго, што M – любы пункт бісектрысы, то каардынаты (x_0, y_0) можна замяніць бягучымі каардынатамі (x, y). Тады маем: $\dfrac{|x+7y|}{5}=|x-y-4|$, ці $\dfrac{x+7y}{5}=\pm(x-y-4)$. Атрымліваем раўнанні дзвюх прамых:

x-3y-5=0 – раўнанне адной бісектрысы m;

3x+y-10=0 – раўнанне другой бісектрысы m′.

Іх кіроўныя вектары $\vec{m}$ і $\vec{m}'$ маюць адпаведна каардынаты (3, 1) і (-1, 3), $\vec{m}$ і $\vec{m}'$ - перпендыкулярныя вектары. Вызначым, якая з бісектрыс з'яўляецца шукаемай.

Вектары $\vec{p}\{-7,1\}$ і $\vec{p}'\{1,1\}$ - кіроўныя вектары прамых d_1 і d_2. Вугал паміж вектарамі $\vec{p}$ і $\vec{p}'$ - тупы, бо $\vec{p}\,\vec{p}'<0$. Адшукаем адзін з кіроўных вектараў бісектрысы гэтага вугла.



Рыс. 14.

Няхай $\vec{p}_0$ і $\vec{p}'_0$ - орты вектараў $\vec{p}$ і $\vec{p}'$ (рыс. 14). Тады $\vec{p}_0=\dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, $\vec{p}_0\left\{-\dfrac{7}{5\sqrt{2}},\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right\}$; $\vec{p}'_0=\dfrac{\vec{p}'}{|\vec{p}'|}$; $\vec{p}'_0\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. $|\vec{p}_0|=|\vec{p}'_0|=1$.

Вектар $\vec{n}=\vec{p}_0+\vec{p}'_0$ з'яўляецца кіроўным вектарам бісектрысы аднаго з вуглоў. Вектар $\vec{n}$ мае каардынаты $\left\{-\dfrac{2}{5\sqrt{2}},\dfrac{6}{5\sqrt{2}}\right\}$. Гэты вектар калінеарны

вектару $\vec{m}'\{-1, 3\}$, $\vec{m}' = \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{n}$. Значыць, бісектрысай тупога вугла з'яўляецца прамая, якая задаецца раўнаннем 3x+y-10=0.

Адк.: x-3y-5=0, 3x+y-10=0 – раўненні бісектрыс,
3x+y-10=0 – раўнанне бісектрысы тупога вугла.

3. Задачы для самастойнага рашэння

! У задачах 2-5, 7, 8, 11, 13, 21, 37-39 каардынаты пунктаў і вектараў задаюцца ў афінным рэперы, у астатніх – у ортаўнармаваным.

Задача 1.

1. Складзіце раўнанне мноства пунктаў, якія знаходзяцца на адлегласці a ад пункта A(b, c). Адк.: $(x-b)^2+(y-c)^2=a^2$.
2. Пункт P(a, b) злучаецца з кожным пунктам M прамой, раўнанне якой y=c. Складзіце раўнанне мноства сярэдзін атрыманых адрэзкаў.
   Адк.: $y = |b - c|$.
3. $x^2+y^2=25$ – раўнанне акружнасці. Складзіце раўнанне мноства сярэдзін хорд гэтай акружнасці, даўжыня кожнай з якіх роўная 8.
   Адк.: $x^2+y^2=9$.
4. Праз пачатак каардынат праведзены ўсе магчымыя хорды акружнасці $(x-8)^2+y^2=64$. Складзіце раўнанне мноства сярэдзін гэтых хорд.
   Адк.: $(x-4)^2+y^2=16$, за выключэннем пункта O(0, 0).
5. Дадзены пункты A(-4, 0) і B(4, 0). Знайдзіце раўнанне мноства пунктаў, сума квадратаў адлегласцей кожнага з якіх да пунктаў A і B роўная 50.
   Адк.: $x^2+y^2=9$.

Задача 2.

Напішыце ў кожным з выпадкаў А-Е раўнанне прамой.

А. Кіроўны вектар прамой - $\vec{p}$, прамая праходзіць праз пункт M_0:

1. $\vec{p}\{-1, 0\}$, $M_0(1, -3)$.
2. $\vec{p}\{0, -2\}$, $M_0(3, 4)$.
3. $\vec{p}\{2, 0\}$, $M_0(5, 2)$.
4. $\vec{p}\{0, -3\}$, $M_0(2, 1)$.
5. $\vec{p}\{5, 0\}$, $M_0(3, 2)$.

Б. Прамая праходзіць праз пункты A і B:

1. A(1, -2), B(0, 2).
2. A(2, -1), B(-2, 1).
3. A(-3, 2), B(-3, 4).
4. A(4, 4), B(4, 5).
5. A(-1, -3), B(5, -3).

В. Прамая адсякае на восях каардынат накіраваныя адрэзкі, велічыні якіх a і b:

1. a=3, b=-2.
2. a=-1, b=4.
3. a=-1, b=3.
4. a=5, b=-4.
5. a=-3, b=4.

Г. Прамая мае вуглавы каэфіцыент k і праходзіць праз пункт A:

1. k=1, A(0, 3).
3. $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$, A(0, 4).
5. k=3, A(0, -3).

2. $k=\frac{1}{2}$, A(0, 5). 4. $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, A(0, 0).

Д. Прамая праходзіць праз пункт перасячэння прамых d_1 і d_2 і ўтварае з дадатняй паўвоссю Ox вугал φ ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$).

1. d_1: y=7x-4, d_2: 2x+y-5=0, φ=60°.
4. d_1: y=x-3y-11, d_2: y=2x-7, φ=150°.
2. d_1: y=2x-3, d_2: 3x-y-4=0, φ=120°.
5. d_1: y=3x-y-1, d_2: y=2x-2, φ=30°.
3. d_1: y=-2x+5, d_2: 7x-y-4=0, φ=45°.

Е. Прамая праходзіць праз пункт P і складае з дадатняй паўвоссю Ox вугал φ ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$).

1. P(2, 7), φ=60°. 3. P(3, -4), φ=150°. 5. P(3, 1), φ=135°.

2. P(-3, 11), φ=45°. 4. P(-5, -7), φ=225°.

Адк.: 1) $\sqrt{3}$x-y+7-2$\sqrt{3}$=0; 2) x-y+14=0;
3) $\sqrt{3}$x+3y+12-3$\sqrt{3}$=0; 4) x-y-2=0; 5) x+y-4=0.

Задача 3.

Напішыце ў кожным выпадку раўнанне прамой AB і знайдзіце яе вуглавы каэфіцыент.

1. A(3, 2), B(0, 2). 4. A(-8, 3), B(7, 0).
2. A(5, 1), B(5, 4). 5. A(3, 5), B(10, 2).
3. A(-7, 6), B(0, 8).

Задача 4.

У выбраным на плоскасці афінным рэперы зрабіце рысункі прамых, якія зададзены сваімі раўнаннямі.

1. x+2y-1=0, x+y=0, $\frac{x}{5}+\frac{y}{-1}=1$, 4y+1=0.

2. 3x-2y+6=0, 2x+y=0, $y=\frac{1}{2}x-2$, x+2=0.

3. 2x+4y-4=0, -2x+y=0, $\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1$, y+5=0.

4. 2x-3y+6=0, -x-2y=0, $y=\frac{2}{3}x+2$, x+3=0.

5. 4x+3y-12=0, x+2y=0, $y=\frac{1}{3}x-3$, y+5=0.

Задача 5.

А. Высветліце ўзаемнае размяшчэнне пар прамых.

1. x+y-3=0 і 2x-2y-6=0; y=2x+5 і 4x-2y-10=0.

2. $x-y+2=0$ і $2x+2y+4=0$; $y=\frac{3}{2}x+2$ і $6x-4y-7=0$.

3. $y=-x+2$ і $2x+2y+7=0$; $x+y+8=0$ і $3x+3y+5=0$.

4. $y=-2x+5$ і $4x-2y-10=0$; $x-2y+6=0$ і $x+2y+6=0$.

5. $3x+2y-6=0$ і $3x-2y-6=0$; $y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$ і $2x+10y-2=0$.

Б. Пры якіх значэннях параметра t наступныя пары прамых будуць паралельнымі прамымі?

1. $3tx-8y+1=0$ і $x+tx-2ty+5=0$.
2. $(4+t)x-4ty+5=0$ і $5tx+2x-8ty+3=0$.
3. $tx+y-ty-2=0$ і $4tx-5ty+y-3=0$.
4. $tx-2x-(2t-8)+1=0$ і $x+tx-(t-1)y+5=0$.
5. $x+tx+2ty+2y+6=0$ і $2(t+1)x+3ty-1=0$.

Задача 6.

Знайдзіце даўжыню адрэзка прамой d, які заключаны паміж восямі каардынат.

1. d: $5x-4y+20=0$. 2. d: $3x-5y-15=0$. 3. d: $2x+3y-6=0$.
4. d: $2x-y+4=0$. 5. d: $3x-4y-12=0$.

Задача 7.

Дадзены вяршыні трохвугольніка ABC. Складзіце: а) раўнанне стараны AB; б) раўнанне медыяны, праведзенай з вяршыні A; в) раўнанне прамой, якая праходзіць праз вяршыню C і паралельная прамой AB; г) раўнанне вышыні трохвугольніка, праведзенай з вяршыні A ($R=\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$).

1. A(1, 2), B(3, 8), C(7, -3).
2. A(3, 5), B(7, -5), C(-3, 9).
3. A(6, 7), B(2, -3), C(-6, 7).
4. A(4, 4), B(-6, 1), C(-2, -4).
5. A(1, 5), B(-1, 2), C(3, 2).

Задача 8.

Дадзены раўнанні трох старон трохвугольніка. У кожным выпадку знайдзіце раўнанне прамой, якая праходзіць праз пачатак каардынат і пункт перасячэння медыян трохвугольніка.

1. $4x-y+4=0$, $y=-x+4$, $x-4y+1=0$.
2. $x+3y+5=0$, $y=2x-1$, $y=2$.
3. $x+y-3=0$, $x-5=0$, $2x+3y-3=0$.
4. $x+y=0$, $x-4=0$, $y=3$.
5. $x=0$, $y=0$, $x+y+5=0$.

Задача 9.

Напішыце ў кожным выпадку раўнанне прамой, якая складае з дадатняй паўвоссю Ox вугал φ і адсякае ад яе накіраваны адрэзак велічыні a.

1. $\varphi=30°$, $a=7{,}5$.
2. $\varphi=45°$, $a=-5$.
3. $\varphi=135°$, $a=-3$.
4. $\varphi=60°$, $a=5$.
5. $\varphi=120°$, $a=4$.

Адк.: 1) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{2}\sqrt{3}$; 2) $x-y+5=0$; 3) $x+y+3=0$;
4) $\sqrt{3}x-y-5\sqrt{3}=0$; 5) $\sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}=0$.

Задача 10.

Напішыце раўнанне прамой, якая праходзіць праз пункт A так, што плошча трохвугольніка, утворанага гэтай прамой і адрэзкамі паўвосей каардынат, якія яна адсякае, роўная S.

1. A(3, 2), S=4, паўвось Ox-дадатная, паўвось Oy-адмоўная.
2. A(3, 2), S=4, паўвось Ox-адмоўная, паўвось Oy- дадатная.
3. A(2, -3), S=4, паўвосі каардынат абедзе адмоўныя.
4. A(18, 10), S=15, паўвось Ox-дадатная, паўвось Oy-адмоўная.
5. A(3, 2), S=12, паўвосі каардынат абедзе дадатныя.

Адк.: 1) 2x-y-4=0; 2) 2x-9y+12=0; 3) x+2y+4=0;
4) 5x-6y-30=0; 5) 2x+3y-12=0.

Задача 11.

Дадзены раўнанні дзвюх сумежных старон AB і AD паралелаграма, а таксама пункт P перасячэння яго дыяганалей. Напішыце раўнанні дзвюх іншых старон.

1. AB: x-y-1=0, AD: x+2y=0, P(3, -1).
2. AB: y=0, AD: x=0, P(2, 1).
3. AB: y-3=0, AD: 4x-3y+1=0, P(8, 4).
4. AB: x+2y-1=0, AD: 3x-y+1=0, P(5, 2).
5. AB: x+y=0, AD: x-2y+1=0, P(3, 4).

Задача 12.

A, B, C - вяршыні трохвугольніка. Знайдзіце каардынаты цэнтра апісанай акружнасці і даўжыню яе радыуса.

1. A(0, 5), B(1, -2), C(-6, 5).
2. A(3, -2), B(3, -2), C(1, 0).
3. A(3, 1), B(1, -3), C(5, -1).
4. A(0, 0), B(2, 4), C(4, 6).
5. A(3, 1), B(5, 3), C(7, 1).

Адк.: 1) (-3, 1), 5; 2) (1, -2), 2; 3) $(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$, $\frac{5\sqrt{2}}{3}$;
4) (11, -3), $\sqrt{130}$; 5) (5, 1), 2.

Задача 13.

Складзіце раўнанні старон трохвугольніка, калі дадзены каардынаты яго вяршыні A і раўнанні дзвюх яго медыян.

1. A(1, 3), x-2y+1=0, y-1=0.
2. A(1, 2), x+y-5=0, x-2y+5=0.
3. A(-1, 2), x+y+6=0, 2x-y=0.
4. A(4, -1), x+y-1=0, 2x+3y=0.
5. A(4, 3), 4x+13y-10=0, x+37y-25=0.

Адк.: 1) x+2y-7=0, x-4y-1=0, x-y+2=0;
2) x-y+1=0, x-1=0, y-4=0;
3) 16x-5y+26=0, 22x+y+20=0; 30x-33y-156=0;
4) 3x+7y-5=0, 3x+2y-10=0, 9x+11y+5=0;
5) x+y-7=0, x+7y+5=0, x-8y+20=0.

Задача 14.

Знайдзіце ў кожным выпадку каардынаты артаганальнай праекцыі пункта P на прамую d.

1. P(0, 5), d: 7x-5y+10=0.
2. P(-5, 6), d: 7x-13y-105=0.
3. P(3, 2), d: x-5y+8=0.
4. P(5, -1), d: 8x-6y+7=0.
5. P(-2, 9), d: 2x-3y+18=0.

Задача 15.

Стораны трохвугольніка зададзены сваімі раўнаннямі. AB: 4x-y-7=0, BC: 2x-5y+1=0, AC: x+2y-26=0. Складзіце раўнанне вышыні, праведзенай

1-2) з вяршыні B.
3-4) з вяршыні A.
5) з вяршыні C.

Задача 16.

Дадзены дзве вяршыні A і B трохвугольніка і пункт H перасячэння яго вышынь. У кожным выпадку знайдзіце каардынаты трэцяй вяршыні C трохвугольніка.

1. A(-6, 2), B(2, -2), H(1, 2).
2. A(-2, 1), B(2, 3), H(2, 1).
3. A(-1, 1), B(3, 4), H(2, 2).
4. A(-1, 4), B(4, $\frac{1}{2}$), H(3, -1).
5. A(-3, 3), B(2, 6), H(1, 4).

Адк.: 1) (2, 4); 2) (2, 1); 3) (5, -2); 4) ($\frac{181}{44}$, $\frac{13}{22}$); 5) ($\frac{25}{7}$, $-\frac{2}{7}$).

Задача 17.

Дадзены раўнанні дзвюх старон a і b трохвугольніка і пункт H перасячэння яго вышынь. Знайдзіце раўнанне трэцяй стараны.

1. a: x+3y-1=0, b: 3x+5y-6=0, H(0, 0).
2. a: x+2y-7=0, b: x-4y-1=0, H($\frac{1}{3}$, $\frac{17}{3}$).
2. a: 3x-5y+9=0, b: x-y+3=0, H(-11, 24).
3. a: 3x+4y-5=0, b: 2x-y+4=0, H(1, $\frac{16}{3}$).
4. a: x+7y+5=0, b: x-8y+20=0,H($\frac{19}{3}$,$\frac{58}{3}$).

Адк.: 1) 39x-9y-4=0; 2) x-y+2=0; 3) x-3y+11=0;
4) 5x+3y-12=0; 5) x+y-7=0;

Задача 18.

Дадзены: вяршыня A трохвугольніка ABC і раўнанні дзвюх яго вышынь. Напішыце раўнанне стараны BC.

1. A(3, -4), 7x-2y-1=0, 2x-7y-6=0.
2. A(1, 4), 3x+y+9=0, x+y-13=0.
3. A(4, 3), 8x+y-60=0, x-y-3=0.
4. A($\frac{5}{2}$, 2), 5x-4y-15=0, 3x-12y-1=0.
5. A(-4, -5), 5x+3y+4=0, 3x+8y+21=0.

Адк.: 1) x-y+2=0; 2) 3x-5y+9=0; 3) 21x+7y-155=0;
4) x-y-3=0; 5) 5x+2y+$\frac{209}{39}$=0.

Задача 19.

Дадзены стораны трохвугольніка. Запішыце ў кожным выпадку раўнанні яго вышынь.

1. $x+3y-2=0$, $2x+y+5=0$, $3x-4=0$.
2. $x-y=0$, $y-2=0$, $2x-y+3=0$.
3. $x+y-5=0$, $x-2=0$, $y-3=0$.
4. $x-y+5=0$, $x-2=0$, $y-3=0$.
5. $x+y+3=0$, $3x+2y+6=0$, $x+3=0$.

Задача 20.

Знайдзіце раўнанні трох старон квадрата, калі дадзены каардынаты яго цэнтра P, і раўнанне адной з яго старон.

1. $P(0, 0)$, $3x+4y-5=0$.
2. $P(-1, 0)$, $x+3y-6=0$.
3. $P(0, 1)$, $x-y+7=0$.
4. $P(1, 0)$, $x+4y-6=0$.
5. $P(0, -1)$, $2x+3y+16=0$.

Адк.: 1) $4x-3y\pm5=0$, $3x+4y+5=0$; 2) $x+3y+8=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+10=0$; 3) $x-y-5=0$, $x+y-7=0$, $x+y+5=0$; 4) $x+4y+4=0$, $4x-y-9=0$, $4x-y+1=0$; 5) $2x+3y-10=0$, $3x-2y-15=0$, $3x-2y+11=0$.

Задача 21.

Пучок прамых зададзены прамымі a і b. Знайдзіце раўнанне прамой пучка, якая: а) праходзіць праз пункт A; б) паралельная прамой c.

1. a: $x-3y+5=0$, b: $2x-y+1=0$, $A(3, 2)$, c: $x=0$.
2. a: $2x-5y+6=0$, b: $x+3y-6=0$, $A(1, 1)$, c: $x-y+1=0$.
3. a: $8x-6y+5=0$, b: $7x-y+14=0$, $A(2, 1)$, c: $x+y+5=0$.
4. a: $x-y+1=0$, b: $2x-y+4=0$, $A(0, 0)$, c: $5x-2y+10=0$.
5. a: $3x+4y+12=0$, b: $4x-5y+5=0$, $A(5, 2)$, c: $2x-3y+5=0$.

Задача 22.

Дадзены раўнанні прамых d_1 і d_2, якія задаюць пучок прамых. Знайдзіце ў кожным выпадку раўнанне прамой пучка, перпендыкулярнай прамой b.

1. d_1: $3x+4y-2=0$, d_2: $5x-12y-4=0$, b: $x-y+5=0$.
2. d_1: $4x-y-7=0$, d_2: $2x-5y+1=0$, b: $x+2y-26=0$.
3. d_1: $x+2y-7=0$, d_2: $x-2y-1=0$, b: $x-y+2=0$.
4. d_1: $2x+y+2=0$, d_2: $2x-y-2=0$, b: $x+2y+1=0$.
5. d_1: $x+y-7=0$, d_2: $x-4y-1=0$, b: $x-y+2=0$.

Адк.: 1) $28x+28y-19=0$; 2) $2x-y-3=0$; 3) $2x+2y-11=0$; 4) $2x-y-2=0$; 5) $x+y-7=0$.

Задача 23.

Дадзены каардынаты вяршынь A, B, C трохвугольніка. Знайдзіце даўжыню вышыні, праведзенай з пункта A.

1. $A(3, 5)$, $B(7, -4)$, $C(-11, -13)$.
2. $A(0, 0)$, $B(4, 7)$, $C(1, -5)$.
3. $A(2, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, 4)$.
4. $A(-3, 3)$, $B(4, 4)$, $C(3, 5)$.
5. $A(-1, 0)$, $B(4, 5)$, $C(6, -1)$.

Адк.: 1) $\frac{22}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{17}}$; 3) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 4) $4\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{10}$.

Задача 24.

Дадзены раўнанні прамых d_1 і d_2.Знайдзіце на гэтых прамых пункты, адлегласць кожнага з якіх да пункта перасячэння прамых d_1 і d_2 роўная ρ.

1. d_1: $x+2y-3=0$, d_2: $x-2y+5=0$, $\rho=\sqrt{5}$.
2. d_1: $2x+y-3=0$, d_2: $2x-y-1=0$, $\rho=\sqrt{5}$.
3. d_1: $x+y-1=0$, d_2: $x-2y+2=0$, $\rho=\sqrt{2}$.
4. d_1. $x+y-1=0$, d_2: $x=0$, $\rho=2$.
5. d_1: $x-y-1=0$, d_2: $y=0$, $\rho=2\sqrt{2}$.

Адк.: 1) (-3, 3), (1, 1); (1, 3), (-3, 1); 2) (2, -1), (0, 3); (2, 3), (0, -1);
3) (-1, 2), (1, 0); $(2\sqrt{\frac{2}{5}}, 1+\sqrt{\frac{2}{5}})$, $(-2\sqrt{\frac{2}{5}}, 1-\sqrt{\frac{2}{5}})$,
4) (-2, 3), (2, -1); (0, 3), (0, -1);
5) (3, 2), (-1, -2); $(1+2\sqrt{2}, 0)$, $(1-2\sqrt{2}, 0)$.

Задача 25.

Знайдзіце раўнанне прамой, якая праходзіць праз пункт $A(x_1, y_1)$ так, што перпендыкуляры, праведзеныя да гэтай прамой з пунктаў $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$, роўныя паміж сабой.

1. A(7, 11), B(3, 4), C(9, 5).
2. A(2, 2), B(3, 5), C(7, 3).
3. A(1, 2), B(4, 7), C(8, 1).
4. A(-1, -2), B(2, 4), C(6, -2).
5. A(-2, 3), B(4, 7), C(8, -1).

Адк.: 1) $x-6y+59=0$ і $13x-2y-69=0$; 2) $2x-3y+2=0$ і $x+2y-6=0$;
3) $2x-5y+8=0$ і $3x+2y-7=0$; 4) $3x-5y-7=0$ і $3x+2y+7=0$; 5) $y=3$ і $2x+y+1=0$.

Задача 26.

Знайдзіце адлегласць паміж паралельнымі прамымі.

1. $6x-8y-11=0$ і $3x-4y+43=0$.
2. $x-y+5=0$ і $-2x+2y+7=0$.
3. $8x+5y-7=0$ і $-8x-5y+14=0$.
4. $3x-2y+1=0$ і $6x-4y+5=0$.
5. $15x-3y+2=0$ і $5x-y+3=0$.

Задача 27.

Дадзена раўнанне прамой d. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, адна з вяршынь якога знаходзіцца ў пункце A(x, y), а дзве іншыя з'яўляюцца пунктамі перасячэння прамой d з восямі каардынат.

1. A(3, 5) d: $2x-3y+12=0$.
2: A(-3, 5) d: $2x+3y-12=0$.
3: A(2, 1) d: $2x-3y+12=0$.
4. A(-3, 3) d: $2x-3y+12=0$.
5. A(3, -2) d: $2x+3y-12=0$.

Задача 28.

Складзіце раўнанне прамой, адлегласць якой да пачатку каардынат роўная ρ і якая адсякае на паўвосях каардынат Ox і Oy накіраваныя адрэзкі з дадзеным дачыненнем m:n.

1. $\rho=4$, m:n=3:2.
2. $\rho=5$, m:n=-2:3.
3. $\rho=3$, m:n=1:-3.
4. $\rho=1$, m:n=-1:-2.
5. $\rho=4$, m:n=2:-3.

Адк.: 1) $2x+3y-4\sqrt{13}=0$; 2) $3x-2y+5\sqrt{13}=0$;
3) $3x-y-3\sqrt{10}=0$; 4) $2x+y+\sqrt{5}=0$; 5) $3x-2y-4\sqrt{13}=0$.

Задача 29.

Напішыце раўнанне прамой, адлегласць якой да пачатку каардынат роўная ρ і якая складае з воссю Ох вугал φ.

1. $\rho=3$, $\varphi=120°$.
2. $\rho=4$, $\varphi=30°$.
3. $\rho=2$, $\varphi=60°$.
4. $\rho=5$, $\varphi=45°$.
5. $\rho=6$, $\varphi=135°$.

Адк.: 1) $\sqrt{3}x+y\pm6=0$; 2) $x-\sqrt{3}y\pm8=0$; 3) $\sqrt{3}x-y\pm4=0$; 4) $x-y\pm5\sqrt{2}=0$; 5) $x+y\pm6\sqrt{2}=0$.

Задача 30.

Дадзены раўнанні старон трапецыі. Знайдзіце плошчу трапецыі.

1. $y=-\frac{x}{3}+5$, $x-2y=0$, $x+3y-45=0$, $3x-y=0$.
2. $2x-3y+8=0$, $2x-y=0$, $2x-3y+12=0$, $2x+y+2=0$.
3. $x+3y-18=0$, $y=-x$, $x+3y-38=0$, $y=3x$.
4. $2x-3y+14=0$, $y=3x$, $y=\frac{2}{3}x+28$, $y=-2x-1$.
5. $y=x$, $y=2$, $y=-5$, $y=-x$.

Адк.: 1) 90 кв. ад.; 2) 6 кв. ад.; 3) 112 кв. ад.; 4) 315 кв. ад.; 5) 21 кв. ад.

Задача 31.

Дадзена раўнанне прамой d. Знайдзіце раўнанні прамых, паралельных прамой d, якія знаходзяцца на адлегласці ρ ад прамой d.

1. d: $4x+5y+11=0$, $\rho=3$.
2. d: $2x+3y+6=0$, $\rho=4$.
3. d: $3x-4y+8=0$, $\rho=2$.
4. d: $5x+y-5=0$, $\rho=5$.
5. d: $2x-3y-6=0$, $\rho=3$.

Адк.: 1) $4x+5y+11\pm3\sqrt{41}=0$; 2) $2x+3y+6\pm\sqrt{13}=0$; 3) $3x-4y+8\pm10=0$; 4) $5x+y-5\pm5\sqrt{26}=0$; 5) $2x-3y-6\pm3\sqrt{13}=0$.

Задача 32.

Складзіце раўнанні бісектрыс вуглоў, утвораных дадзенымі прамымі.

1. $3x-y+6=0$ і $x-y+4=0$.
2. $x+y-2=0$ і $y-3=0$.
3. $x-4y-6=0$ і $2x+y-18=0$.
4. $x-2y+8=0$ і $x+y-9=0$.
5. $x+y-4=0$ і $x-6y+3=0$.

Задача 33.

Знайдзіце раўнанне бісектрысы вострага вугла, утворанага прамымі d_1 і d_2.

1. d_1: $7x+y-1=0$, d_2: $x-y+1=0$. Адк.: $12x-4y+4=0$.
2. d_1: $x-2y+3=0$, d_2: $2x-y-1=0$. Адк.: $3x-3y+2=0$.
3. d_1: $4x-3y+3=0$, d_2: $y-3=0$. Адк.: $2x-4y+9=0$.
4. d_1: $x-y=0$, d_2: $y=0$. Адк.: $x-(1+\sqrt{2})y=0$.
5. d_1: $2x+y-1=0$, d_2: $x+2y-3=0$. Адк.: $3x+3y-4=0$.

Задача 34.

Складзіце раўнанні старон трохвугольніка, калі дадзены: адна яго вяршыня $A(x_1, y_1)$, раўнанне вышыні d і раўнанне бісектрысы ℓ, праведзеных з адной вяршыні.

1. A(1, 3), d: 2x+2y-11=0, ℓ: 2y-3=0. 4. A(-3, -1), d: 4x+y-7=0, ℓ: 2x-5=0.
2. A(-1, 3), d: x-y+3=0, ℓ: 2x-y+1=0. 5. A(0, -2), d: 5x-10y-11=0, ℓ: x-3y-3=0.
3. A(-1, 0), d: 2x-y-2=0, ℓ: x=0.

Адк.: 1) x+2y-5=0, x-2y-1=0, x-y+2=0; 2) 2x-3y+11=0, 18x+y-41=0, x+y-2=0; 3) x+2y+1=0, 2x-y-2=0, 2x+y+2=0; 4) 4x+11y+23=0, 4x-11y-43=0, x-4y-1=0; 5) 2x+y+2=0, 2x-y-2=0, x+2y+1=0.

Задача 35.

Пункты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ з'яўляюцца вяршынямі трохвугольніка. Складзіце сістэму няроўнасцей, якой здавальняюць каардынаты пунктаў унутранага абсягу трохвугольніка ABC.

1. A(-5, 0), B(2, 8), C(7, -3). 4. A(1, -2), B(5, 4), C(-2, 5).
2. A(-4, 0), B(-2, 8), C(12, 1). 5. A(-1, -1), B(5, 1), C(2, 5).
3. A(-2, 2), B(7, 3), C(-5, 6).

Адк.: 1. x+4y-5>0, 8x-7y+40>0, 11x+5y-64<0 – сістэма няроўн.
2. 4x-y-16>0, x+2y-14<0, x-16y+4<0 – сістэма няроўн.
3. x-9y+20<0, x+4y-19<0, 4x+3y+2>0 – сістэма няроўн.
4. 3x-2y-7>0, x+7y-33<0, 7x+3y-1>0 – сістэма няроўн.
5. x-3y-2<0, 4x+3y-23<0, 2x-y+1>0 – сістэма няроўн.

Задача 36.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ – вяршыні трохвугольніка. Высветліце, унутраным ці вонкавым пунктам трохвугольніка ABC будзе пункт $M_0(x_0, y_0)$.

1. A(-5, 0), B(2, 8), C(7, -3), $M_0(5, -1)$. Адк.: унутраны пункт.
2. A(-4, 0), B(-2, 8), C(12, -3), $M_0(\frac{1}{2}, 0)$. Адк.: знешні пункт.
3. A(-2, 2), B(7, 3), C(-5, 6), $M_0(-3, 2)$. Адк.: знешні пункт.
4. A(1, -2), B(5, 4), C(-2, 5), $M_0(2, 1)$. Адк.: унутраны пункт.
5. A(-1, -1), B(5, 1), C(2, 5), $M_0(-1, -2)$. Адк.: знешні пункт.

Задача 37.

Дадзены раўнанні дзвюх паралельных прамых. Гэтыя прамыя дзеляць плоскасць на тры абсягі: паласу Π_1 паміж прамымі і два абсягі Π_2 і Π_3 – вонкавыя адносна гэтай паласы. Складзіце сістэмы няроўнасцей, якім здавальняюць каардынаты пунктаў кожнага абсягу, і высветліце, якому абсягу Π_1, Π_2, Π_3 прыналежаць пункты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$.

1. 2x-5y+6=0, 2x-5y-4=0, A(2, 1), B(3, 2), C(1, 1), D(2, 8).
2. x+y-8=0, x+y+10=0, A(0, 0), B(3, -1), C(2, 5), D(-5, -8).
3. x-y-1=0, x-y+15=0, A(0, 2), B(3, 5), C(-8, -10), D(15, 2).
4. 3x-2y+7=0, 3x-2y-8=0, A(0, 0), B(5, 7), C(2, -3), D(7, 5).
5. 5x-y+3=0, 5x-y-12=0, A(0, 1), B(3, 7), C(2, -15), D(3, 10).

Задача 38.

У кожным выпадку знайдзіце вугал паміж дзвюма прамымі.

1. а) 2x-y+5=0 і y=x-8; б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$ і x=5+4t, y=-3t.

2. а) x=2+2t, y=-1+3t і x+2y-1=0, б) y=-x+2 і 2x-y+1=0.

3. а) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ і 2x-3y-6=0, б) $y=-\frac{x}{3}+6$ і $y=\frac{1}{2}x$.

4. а) 5x-2y+3=0 і $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}$, б) y=x+5 і $\frac{x}{3}=-\frac{y}{2}$.

5. x+3y=0 і x=3, б) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}$ і y=2x-1.

Задача 39.

Дадзена раўнанне прамой d і пункт $A(x_1, y_1)$. Напішыце раўнанні прамых, якія праходзяць праз пункт A і ўтвараюць з прамой d вугал φ.

1. A(3, 5), d: 2x-3y-7=0, φ=45°.
2. A(5, 6), d: x+y+4=0, φ=30°.
3. A(6, 4), d: 2x+y-4=0, φ=60°.
4. A(2, 3), d: x+y+5=0, φ=60°.
5. A(3, 8), d: x-y-6=0, φ=45°.

Адк.: 1) x+5y-28 і 5x-y-10=0;
2) $(3-\sqrt{3})x+(3+\sqrt{3})y-33-\sqrt{3}=0$ і $(3+\sqrt{3})x+(3-\sqrt{3})y-33+\sqrt{3}=0$;
3) $(2+\sqrt{3})x-(1+2\sqrt{3})y-8+2\sqrt{3}=0$ і $(2+\sqrt{3})x-(2\sqrt{3}-1)y-16+2\sqrt{3}=0$;
4) $(\sqrt{3}-1)x-(\sqrt{3}+1)y+5+\sqrt{3}=0$ і $(\sqrt{3}+1)x-(\sqrt{3}-1)y-5+\sqrt{3}=0$
5) x=3 і y=8.

Задача 40.

1. Знайдзіце каардынаты вяршынь ромба, калі дадзены раўнанні дзвюх яго старон x+3y+12=0, x+3y-8=0 і раўнанне дыяганалі 2x+y+4=0.

Адк.: (0, -4), (-4, 4), (2, 2), (-6, -2).

2. Знайдзіце плошчу ромба ABCD, калі A(-1, 3) – яго вяршыня, $M_0(0, 2)$ – пункт прамой AB, Q(2, 1) – пункт перасячэння яго дыяганалей.

Адк.: $S=\frac{26}{5}$.

3. 2x-3y+6=0 – раўнанне стараны AB трохвугольніка ABC, 2x+y-2=0 і x+3y-12=0 – раўнанні дзвюх яго вышынь AH і BK. Складзіце раўнанні дзвюх іншых старон трохвугольніка.

Адк.: 9x-3y-8=0, x-2y+4=0.

4. Складзіце раўнанні катэтаў раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка, калі дадзены раўнанне гіпатэнузы 3x-y+5=0 і вяршыня C(4, -1) прамога вугла.

Адк.: 2x+y-7=0, x-2y-6=0.

5. A(-1, 4), B(0,5) – вяршыні трохвугольніка ABC, плошча якога роўная 4, 2x+y-3=0 – раўнанне прамой, на якой ляжыць вяршыня C. Складзіце раўнанні старон трохвугольніка.

Адк.: x-y+5=0, 3x+y-5=0, 5x+3y-7=0.

Задача 41.

Дадзены раўнанні прамых d і b – асновы і бакавой стараны раўнабедранага трохвугольніка. Знайдзіце раўнанне другой бакавой стараны, пры ўмове, што яна праходзіць праз пункт P.

1. d: $3x-11y-33=0$, b: $3x-y-9=0$, P(9, 3).
2. d: $2x+3y=0$, b: $5x-12y=0$, P(2, 6).
3. d: $2x-5y+1=0$, b: $12x-y-23=0$, P(3, 1).
4. d: $2x+3y-6=0$, b: $4x-7y+14=0$, P(7, 6).
5. d: $2x-y=0$, b: $3x-3y+25=0$, P(5, 3).

Адк.: 1) $27x+31y-336=0$; 2) $x-2=0$; 3) $8x+9y-33=0$; 4) $8x-y-50=0$; 5) $7x-y-32=0$.

Задача 42.

1. Дадзены дзве вяршыні A(1, 2), B(3, 4) трохвугольніка ABC і тангенсы ўнутраных вуглоў пры гэтых вяршынях: $\operatorname{tg}A=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}B=\frac{1}{3}$. Знайдзіце каардынаты вяршыні C пры ўмове, што яна ляжыць па той жа бок ад прамой AB, што і пачатак каардынат.

Адк.: C(-1, -4).

2. Дадзены вяршыня C(-3, 2) трохвугольніка ABC, раўнанне $2x-y-2=0$ стараны AB і тангенсы двух унутраных вуглоў $\operatorname{tg}A=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}B=\frac{4}{3}$. Складзіце раўнанне дзвюх іншых старон трохвугольніка.

Адк.: $x+y=0$, $2x-11y+28=0$ ці $3x-4y+17=0$, $2x+y+4=0$.

3. Дадзены раўнанні дзвюх прамых $x+3y=0$ і $x-y+8=0$. Знайдзіце раўнанне трэцяй прамой так, каб другая з дадзеных прамых была бісектрысай вугла паміж першай і шукаемай прамой.

Адк.: $3x+y+16=0$.

4. $x+7y-6=0$ – раўнанне стараны трохвугольніка, $x+y-2=0$ і $x-3y-6=0$ – раўнанні бісектрыс, якія выходзяць з канцоў дадзенай стараны. Знайдзіце каардынаты вяршыні, якая ляжыць супраць дадзенай стараны.

Адк.: (2, -4).

5. $3x+y-3=0$, $3x+4y=0$ – раўнанні дзвюх старон трохвугольніка, $x-y+5=0$ – раўнанне бісектрысы аднаго з унутраных вуглоў гэтага трохвугольніка. Складзіце раўнанне трэцяй стараны.

Адк.: $x+3y-13=0$.

§3. Прамая і плоскасць у прасторы

1. Кароткія тэарэтычныя звесткі

– Раўнанні прамой.

$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{\ell}t$, $\vec{r}$ - радыус-вектар адвольнага пункта прамой, $\vec{r}_0$ - радыус вектар дадзенага пункта, $\vec{\ell}$ - кіроўны вектар прамой, t – параметр адвольнага пункта прамой; $t\in\mathbb{R}$ – вектарнае раўнанне прамой;

$x=x_0+\ell_1 t$, $y=y_0+\ell_2 t$, $z=z_0+\ell_3 t$, x, y, z – каардынаты адвольнага

пункта прамой, x_0, y_0, z_0 - каардынаты дадзенага пункта, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 - каардынаты кіроўнага вектара прамой, t – параметр адвольнага пункта прамой;

$\frac{x-x_0}{\ell_1}=\frac{y-y_0}{\ell_2}=\frac{z-z_0}{\ell_3}$ - кананічныя раўнанні.

– Раўнанні плоскасці.

$\vec{r}=\vec{r}_0+\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$, $\alpha,\beta\in \mathbb{R}*$ - вектарнае раўнанне плоскасці;

$\begin{cases} x=x_0+\alpha p_1+\beta q_1, \\ y=y_0+\alpha p_2+\beta q_2, \\ z=z_0+\alpha p_3+\beta q_3 \end{cases}$ - параметрычныя раўнанні;

$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=0$ - раўнанне плоскасці, якая задаецца пунктам (x_0,y_0,z_0) і некалінеярнымі вектарамі $\{p_1,p_2,p_3\}$, $\{q_1,q_2,q_3\}$;

$Ax+By+Cz+D=0$ - агульнае раўнанне, $A^2+B^2+C^2\neq 0$;

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \end{vmatrix}=0$ – раўнанне плоскасці, якая задаецца пунктамі $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$;

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ - раўнанне плоскасці "у адрэзках".

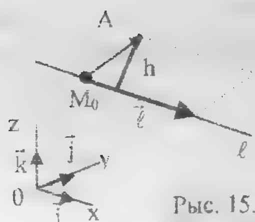
– Нармальнае раўнанне плоскасці $(R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\})$:

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, дзе $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - каардынаты кіроўнага вектара перпендыкуляра, праведзенага з пачатка каардынат да плоскасці, p – даўжыня гэтага перпендыкуляра.

– Адлегласць ад пункта $M_0(x_0,y_0,z_0)$ да плоскасці Π: $Ax+By+Cz+D=0$

$(R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\})$: $\rho(M_0,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

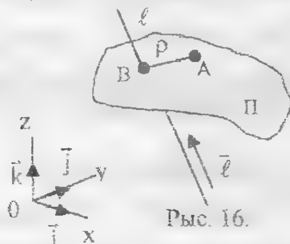
– Адлегласць ад пункта A да прамой ℓ. Пункт A мае каардынаты (x',y',z'); прамая ℓ задаецца раўнаннямі $x=x_0+\ell_1 t$, $y=y_0+\ell_2 t$, $z=z_0+\ell_3 t$, дзе $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – пункт прамой ℓ, $\vec{\ell}\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\}$ - яе кіроўны вектар $(R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\})$.



Рыс. 15.

Спосаб 1. На вектарах $\overline{M_0A}$ і $\vec{\ell}$ (вектар $\vec{\ell}$ адкладзем ад пункта M_0) пабудуем паралелаграм (рыс.15). Вышыня гэтага паралелаграма, праведзеная з пункта A на прамую ℓ, будзе адлегласцю ад пункта A да прамой ℓ.

$S_{\text{парал}} = \left|\left[\overline{M_0A}, \vec{\ell}\right]\right|$; $S_{\text{парал}} = k\left|\vec{\ell}\right|$. Адсюль $\rho(A, \ell) = k = \dfrac{\left|\left[\overline{M_0A}, \vec{\ell}\right]\right|}{\left|\vec{\ell}\right|}$.

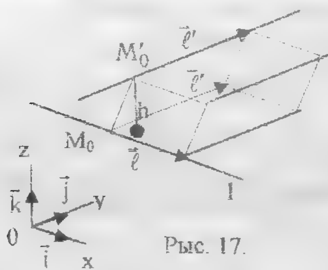


Рыс. 16.

Спосаб 2. Праз пункт A правядзем плоскасць П, перпендыкулярную прамой ℓ (рыс. 16). Раўнанне плоскасці П: $\ell_1 x + \ell_2 y + \ell_3 z + D = 0$. Каэфіцыент D можна знайсці з умовы, што $A(x', y', z')$ ляжыць у плоскасці П. Няхай B – пункт перасячэння плоскасці П і прамой ℓ. $AB \perp \ell$. $\rho(A, \ell) = AB$.

– Адлегласць паміж скражавальнымі прамымі.

Прамая ℓ задаецца пунктамі $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектарам $\vec{\ell}\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$, прамая ℓ' - $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ і $\vec{\ell}'\{\ell_1', \ell_2', \ell_3'\}$ $(R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$.



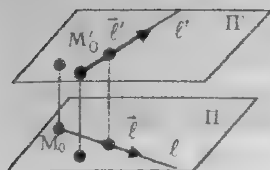
Рыс. 17.

Спосаб 1. Вектары $\vec{\ell}$ і $\vec{\ell}'$ адкладзем ад пункта M_0. На вектарах $\overline{M_0M_0'}$, $\vec{\ell}$ і $\vec{\ell}'$ пабудуем паралелепіпед (рыс. 17). Вышыня гэтага паралелепіпеда будзе роўная адлегласці паміж скрыжавальнымі прамымі ℓ і ℓ'.

$V_{\text{парал.}} = \left|\overline{M_0M_0'}\ \vec{\ell}\ \vec{\ell}'\right|$,

$V_{\text{парал.}} = h\left|\left[\vec{\ell}, \vec{\ell}'\right]\right|$.

$$\rho(\ell\ell') = \frac{\left|\overline{M_0M_0'}\ \vec{\ell}\ \vec{\ell}'\right|}{\left|\left[\vec{\ell}, \vec{\ell}'\right]\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} x_0' - x_0 & y_0' - y_0 & z_0' - z_0 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_1' & \ell_2' & \ell_3' \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_2' & \ell_3' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \ell_3 & \ell_1 \\ \ell_3' & \ell_1' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1' & \ell_2' \end{vmatrix}^2}}.$$



Рыс. 18.

Спосаб 2. Існуе адзіная пара паралельных пласкасцей П і П', якія праходзяць адпаведна праз прамыя ℓ і ℓ' (рыс. 18). Адлегласць паміж гэтымі плоскасцямі роўная адлегласці паміж скрыжавальнымі прамымі ℓ і ℓ'. Плоскасць П задаецца пунктам M_0 і вектарамі $\vec{\ell}$ і $\vec{\ell}'$, плоскасць П' - пунктам M_0' і вектарамі ℓ і ℓ'.

– Вугал паміж дзвюма прамымі ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$):

ℓ: $x = x_0 + \ell_1 t$, $y = y_0 + \ell_2 t$, $z = z_0 + \ell_3 t$,

ℓ': $x' = x_0' + \ell_1' t'$, $y' = y_0' + \ell_2' t'$, $z' = z_0' + \ell_3' t'$.

$$\cos\varphi = \frac{\ell_1\ell_1' + \ell_2\ell_2' + \ell_3\ell_3'}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}\,\sqrt{\ell_1'^2 + \ell_2'^2 + \ell_3'^2}}.$$

– Вугал паміж дзвюма плоскасцямі ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$):

$П_1$: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $П_2$: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

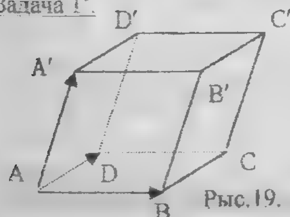
– Вугал паміж прамой і плоскасцю ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$):

ℓ: $x = x_0 + \ell_1 t$, $y = y_0 + \ell_2 t$, $z = z_0 + \ell_3 t$, П: $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\sin\varphi = \frac{|A\ell_1 + B\ell_2 + C\ell_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}},\ 0° < \varphi < 90°.$$

2. Прыклады рашэння задач

Задача 1^0.



Рыс.19.

ABCDA'B'C'D' - паралелепіпед (рыс. 19). У якасці афіннага рэпера выбіраецца рэпер $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, дзе $\vec{e}_1 = \overline{AB}$, $\vec{e}_2 = \overline{AD}$, $\vec{e}_3 = \overline{AA'}$. Складзіце раўнанні плоскасцей: ADD'A', CC'D'D, BB'D'D.

Рашэнне.

Каб напісаць раўнанне плоскасці, дастаткова ведаць каардынаты пункта, які ляжыць у плоскасці, і каардынаты двух лінейна незалежных вектараў, якія задаюць плоскасць. Для плоскасці ADD'A' гэта: пункт A(0, 0, 0), вектары $\overline{AD} = \vec{e}_2\{0,1,0\}$ і $\overline{AA'} = \vec{e}_3\{0,0,1\}$. Тады раўнанне плоскасці можна запісаць у выглядзе:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ ці x=0 – раўнанне плоскасці $ADD'A'$.

Для плоскасці $CC'D'D$: $D(0,1,0)$, $\overline{DC} = \overline{AB} = \vec{e}_1\{1,0,0\}$ і $\overline{DD'} = \overline{AA'} = \vec{e}_3\{0,0,1\}$.

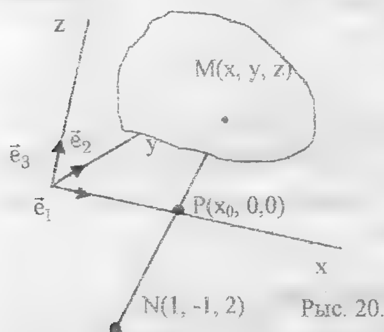
$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ y-1=0, ці y=1.

Для плоскасці $BB'D'D$:$B(1,0,0)$, $\overline{DD'} = \overline{AA'}\{0,0,1\}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$, $\overline{BD}\{-1,1,0\}$.

Раўнанне плоскасці: $$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ -y-x+1=0, ці x+y-1=0.

Адк.: x=0, y=1, x+y-1=0.

Задача 2^0.



Рыс. 20.

На плоскасці П: 3x-2y+5z+5=0 знайдзіце пункт M(x, y, z) такі, што адрэзак MN, дзе N(1, -1, 2), воссю Ox дзеліцца ў дачыненні 1:2 (рыс. 20).

Рашэнне.

Няхай $P(x_0, 0, 0)$ – пункт перасячэння адрэзка з воссю Ox. Тады $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{PN}$

(па ўмове). $x_0 = \dfrac{x + \frac{1}{2}\cdot 1}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2x+1}{3}$,

$y_0 = 0 = \dfrac{y - \frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2y-1}{3}$, $z_0 = 0 = \dfrac{z + 2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2z+2}{3}$. Гэта дае $y=\frac{1}{2}$, z=-1,

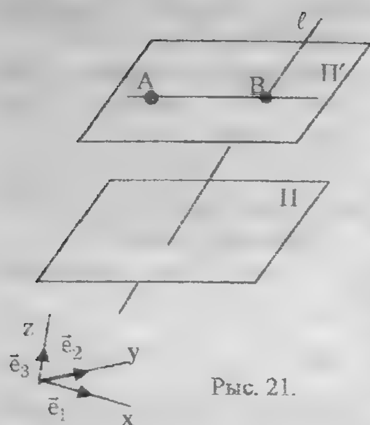
пункт M мае каардынаты $(x, \frac{1}{2}, 1)$. M∈П, значыць, 3x-1+5+5=0, адсюль, x=-3.

Адк.: $M(-3, \frac{1}{2}, 1)$.

Задача 3^0.

Складзіце раўнанне прамой, якая праходзіць праз пункт A(1, 2, -1), перасякае прамую ℓ: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{3}$ і паралельная плоскасці П: x+2y-z+5=0.

Рашэнне.



Рыс. 21.

Шукаемая прамая павінна быць паралельнай плоскасці Π, таму яна павінна ляжаць у плоскасці Π′, якая праходзіць праз пункт A і паралельная плоскасці Π (рыс. 21). Шукаемая прамая павінна перасякаць прамую ℓ, а значыць, яна будзе праходзіць праз пункт B перасячэння прамой ℓ з плоскасцю Π′. Усё гэта магчыма, калі прамая ℓ не паралельная плоскасці Π. Прамая ℓ не паралельная плоскасці Π, паколькі не выконваецца ўмова паралельнасці вектара $\vec{\ell}\{2,1,3\}$ і плоскасці Π: $2\cdot2+2\cdot1-3\cdot1\neq0$. Такім чынам, можна скласці план рашэння задачы.

Трэба знайсці:

1) раўнанне плоскасці Π′ (Π′ ∥ Π і Π′ праходзіць праз пункт A),
2) пункт B, $B=\Pi'\cap\ell$,
3) раўнанне прамой AB.

Выканаем дзеянні:

1) Π′: $x+2y-z+D=0$, $1+4+1+D=0$, $D=-6$.
   $x+2y-z-6=0$;
2) B: $x=-1+2t$, $y=3+t$, $z=3t$, $1-2t+2(3+t)-3t-6=0$, $-1+t=0$, $t=1$,
   $B(1, 4, 3)$;
3) AB: $x=1$, $\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{4}$.

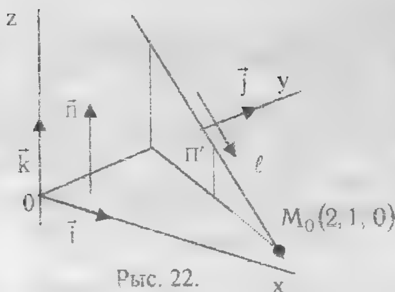
Адк.: $\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{4}$, $x=1$.

Задача 4^0.

Складзіце раўнанні артаганальнай праекцыі прамой ℓ: $x=2+3t$, $y=1+t$, $z=t$ на плоскасць Π: $z=0$ ($R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$).

Рашэнне.

Спосаб 1. Плоскасць Π – гэта плоскасць Oxy ($z=0$). Артаганальнай праекцыяй прамой ℓ на плоскасць Oxy з'яўляецца лінія ℓ' перасячэння плоскасці Oxy з плоскасцю Π′, якая праходзіць праз прамую ℓ і перпендыкулярная плоскасці Oxy (рыс. 22).



Рыс. 22.

План рашэння наступны. Знаходзім:

1) раўнанне плоскасці Π' (M_0, $\vec{\ell}\{3,1,1\}$ і $\vec{n}$ - нармальны вектар плоскасці Oxy, $\vec{n}=\vec{k}$),

2) раўнанне прамой ℓ' перасячэння плоскасцей Oxy (z=0) і Π'.

Выканаем дзеянні:

1) $\Pi'\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ці x-3y+1=0, 2) $\ell': \begin{cases} x-3y+1=0, \\ z=0. \end{cases}$

Раўнанні прамой ℓ' можна запісаць у кананічным выглядзе. Для гэтага знаходзім адвольны пункт A гэтай прамой, напрыклад, A(2, 1, 0), і кіроўны вектар прамой ℓ' - $\vec{p}\{3, 1, 0\}$. ℓ': $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}$, z=0.

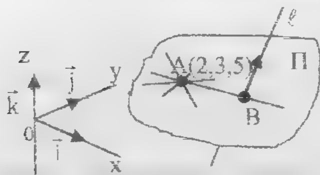
Спосаб 2. Можна выбраць два пункты на прамой ℓ, напрыклад, $M_0(2, 1, 0)$ і K(5, 2, 1), знайсці іх артаганальныя праекцыі M_0' і K' на плоскасць Oxy, запісаць раўнанні прамой, якая праходзіць праз пункты M_0' і K'.

Адк.: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}$, z=0.

Задача 5^0.

Знайдзіце аснову перпендыкуляра, праведзенага з пункта A(2, 3, 5) да прамой ℓ: x=1-2t, y=-1+3t, z=2-t ($R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$).

Рашэнне.



Рыс. 23.

Няхай B – аснова перпендыкуляра, праведзенага з пункта A да прамой ℓ (рыс. 23), $AB\perp\ell$. Усе прамыя, якія праходзяць праз пункт A і перпендыкулярныя прамой ℓ, утвараюць плоскасць П, якая перпендыкулярная прамой ℓ. Сярод гэтых прамых знаходзіцца прамая AB.

Паколькі пункт B ляжыць на прамой ℓ, таму пункт B супадае з пунктам перасячэння прамой ℓ з плоскасцю П.

Атрымліваем наступны план рашэння задачы. Знаходзім: 1) раўнанне плоскасці П ($\Pi\perp\ell$ і $A\in\Pi$), 2) пункт B, дзе $B=\Pi\cap\ell$.

Выканаем дзеянні:

1) П: $\vec{\ell}\{-2,\ 3,\ -1\}$ – нармальны вектар плоскасці П, $-2x+3y-z+D=0$, A(2, 3, 5), -4+9-5+D=0, D=0. 2x-3y+z=0.

2) B: 2(1-2t)-3(-1+3t)+2-t=0, $t=\frac{1}{2}$. $B(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$.

Адк.: $(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$.

Задача 6^0.

Складзіце раўнанне плоскасці П, якая праходзіць праз лінію перасячэння плоскасцей 3x-y+z-2=0 і x-y+z+3=0 і адсякае на восях Ox і Oy накіраваныя адрэзкі, велічыні якіх роўныя.

Рашэнне.

Спосаб 1. Дадзеныя дзве плоскасці задаюць пучок, яго раўнанне
$\alpha(3x - y + z - 2) + \beta(x - y + z + 3) = 0$.

Шукаемая плоскасць П прыналежыць гэтаму пучку. Яна адсякае на восях каардынат накіраваныя адрэзкі, велічыні якіх роўныя. Значыць, плоскасць П праходзіць праз пункт M восі Ox, M(a, 0, 0) і праз пункт N восі Oy, N(0, a, 0). Вектар $\overline{MN}$ здавальняе ўмове паралельнасці вектара плоскасці; таму яго каардынаты і каэфіцыенты A, B, C раўнання шукаемай плоскасці здавальняюць умове: $-1\cdot A+1\cdot B+0\cdot C=0$.
Адсюль, A=B.
Перапішам раўнанне пучка ў выглядзе:
$(3\alpha + \beta)x + (-\alpha - \beta)y + (\alpha + \beta)z - 2\alpha + 3\beta = 0$.
Тады $3\alpha + \beta = -\alpha - \beta$, ці $\beta = -2\alpha$. Раўнанне плоскасці П: x+y-z-8=0.

Адк.: x+y-z-8=0.

Спосаб 2. Кіроўны вектар прамой ℓ перасячэння дадзеных плоскасцей мае каардынаты:
$\vec{\ell}\left\{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right\}$, ці $\vec{\ell}\{0,\ -2,\ -2\}$; вектар з каардынатамі {0, 1; 1}, калінеарны вектару $\vec{\ell}$, таксама з'яўляецца кіроўным вектарам восі ℓ пучка. Вектары $\overline{MN}\{-a, a, 0\}$ і $\overline{p}\{-1, 1, 0\}$ - калінеарныя і паралельныя плоскасці П. Каб запісаць раўнанне плоскасці, неабходна знайсці пункт, які ляжыць у плоскасці П. Такім пунктам можа быць адвольны пункт прамой ℓ:

$$\begin{cases}3x - y + z - 2 = 0,\\ x - y + z + 3 = 0.\end{cases}$$

Пункт $M_0\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, 0\right)$ здавальняе раўнанням сістэмы, значыць, ён ляжыць на восі пучка.

Раўнанне плоскасці мае выгляд: $\begin{vmatrix} x-\frac{5}{2} & y-\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$, ці x+y-z-8=0.

Адк.: x+y-z-8=0.

Задача 7^0.

Складзіце раўнанне плоскасці, якая знаходзіцца на адлегласці 6 адз. ад пачатку каардынат і адсякае на восях каардынат накіраваныя адрэзкі, велічыні якіх прапарцыянальныя лікам –2, 3, 1 ($R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$).

Рашэнне.

Запішам раўнанне плоскасці "у адрэзках", улічваючы, што накіраваныя адрэзкі прапарцыянальныя лікам –2, 3, 1. Маем $\frac{x}{-2m}+\frac{y}{3m}+\frac{z}{m}=1$, m>0. (Калі m<0, тады накіраваныя адрэзкі будуць прапарцыянальныя лікам 2, -3, -1.) Перапішам раўнанне плоскасці ў агульным выглядзе 3x-2y-6z+6m=0 (П). Адлегласць пачатка каардынат 0(0, 0, 0) ад плоскасці П $\rho(0,\ П)=\frac{|6m|}{7}$, $\rho(0,\ П)=6$.

Знаходзім $|6m|=42$, 6m=±7. З прычыны таго, што m>0, умове задачы здавальняе толькі значэнне m=7. Раўнанне плоскасці: 3x-2y-6z+42=0.

Адк.: 3x-2y-6z+42=0.

Задача 8^0.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз прамую ℓ: x=3t, y=-1, z=1-t і ўтварае з плоскасцю П: x+2y+3z+3=0 такі вугал φ, косінус якога роўны $\frac{3}{7}$ ($R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$).

Рашэнне.



Рыс. 24.

Няхай $A'x+B'y+C'z+D'=0$ - раўнанне шукаемай плоскасці П′. Калі $A'\neq 0$, раўнанне плоскасці П′ можна запісаць $x+By+Cz+D=0$, дзе $B=\frac{B'}{A'}$, $C=\frac{C'}{A'}$, $D=\frac{D'}{A'}$.

Плоскасць П′ праходзіць праз прамую ℓ (рыс. 24), таму па ўмове паралельнасці вектара плоскасці маем
$1\cdot 3+0\cdot B-1\cdot C=0$ і C=3.

Раўнанне плоскасці П′ запішацца: x+By+3z+D=0. Косінус вугла паміж плоскасцямі П і П′ выразіцца:

$\cos\varphi = \frac{1+2B+9}{\sqrt{14}\sqrt{1+B^2+9}}$. На падставе задачы $\cos\varphi = \frac{3}{7}$. Каэфіцыент B знаходзім з раўнання $\frac{2B+10}{\sqrt{14}\sqrt{B^2+10}} = \frac{3}{7}$. 1) B=-26, пабочны корань, 2) B=-2.

Тады, x-2y+3z+D=0. Плоскасць праходзіць праз пункт (0, -1, 1) прамой ℓ, што дае магчымасць знайсці D.

Адк.: x-2y+3z-5=0.

3. Задачы для самастойнага рашэння

! У задачах 1 – 27, 30, 39, 41 каардынаты пунктаў і вектараў зададзены ў афінным рэперы, у астатніх – у ортаўнармаваным.

Задача 1.

Напішыце параметрычныя раўнанні прамой, якая задаецца пунктам A і кіроўным вектарам $\vec{p}$. У кожным выпадку вызначыце, ляжыць ці не ляжыць пункт B на гэтай прамой.

1. A(3, 2, 1), $\vec{p}\{3, -1, 2\}$; B(5, 1, -1).
2. A(1, 0, 3), $\vec{p}\{-1, 2, -3\}$; B(1, 2, 8).
3. A(3, 4, -5), $\vec{p}\{2, -1, -4\}$; B(3, 5, 1).
4. A(1, -2, -1), $\vec{p}\{3, 2, -1\}$; B(4, 3, 5).
5. A(0, 0, -2), $\vec{p}\{1, -1, -3\}$; B(2, -1, 3).

Задача 2.

Пакажыце, што прамыя ℓ і ℓ' супадаюць.

1. ℓ: x=5+2t, y=1-3t, z=-2+t, ℓ': x=8+4t′, y=$-\frac{7}{2}$-6t′, z=$-\frac{1}{2}$+2t′.
2. ℓ: x=-1+3t, y=2+2t, z=-3-4t, ℓ': x=5-6t′, y=6-4t′, z=-11+8t′.
3. ℓ: x=2-4t, y=-10-t, z=3+3t, ℓ': x=10+2t′, y=-8+$\frac{1}{2}$t′, z=-3-$\frac{3}{2}$t′.
4. ℓ: x=5-t, y=8, z=-1-2t, ℓ': x=3-2t′, y=8, z=-5-4t′.
5. ℓ: x=2-3t, y=3, z=-3+t, ℓ': x=5+3t′, y=3, z=-4-t′.

Задача 3.

Высветліце ўзаемнае размяшчэнне прамых ℓ і ℓ'.

1. ℓ: x=1+2t, y=1+t, z=3+4t, ℓ': $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{1}$.
2. ℓ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$, ℓ': x=-2t, y=5+3t, z=4.
3. ℓ: x=2t, y=-1-2t, z=2+t, ℓ': $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{1}$, z=2.
4. ℓ: x=1+2t, y=2t, z=t, ℓ': $\frac{x-11}{8} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-2}{1}$.
5. ℓ: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{4}$, ℓ': x=-2+3t, y=-1, z=4-t.

Задача 4.

Высветліце ўзаемнае размяшчэнне прамых ℓ і ℓ'.

1. ℓ: x=2+2t, y=1-t, z=5+3t, ℓ': x=3-3t′, y=-2-4t′, z=-2t′.
2. ℓ: x=1+2t, y=-3+t, z=-2+5t, ℓ': $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-3}{7}$.
3. ℓ: $\frac{x-6}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+3}{4}$, ℓ': x=2-t, y=3-8t, z=-3t.
4. ℓ: x=3-2t, y=2+2t, z=-1+3t, ℓ': x=1-3t′, y=3-2t′, z=5t′.
5. ℓ: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{5}$, ℓ': x=3-3t, y=5-5t, z=3t.

Задача 5.

Дакажыце, што прамыя ℓ і ℓ' перасякаюцца, і знайдзіце каардынаты пункта іх перасячэння.

1. ℓ: x=-1-t, y=2+3t, z=1+2t, ℓ': x=-4+2t′, y=8-3t′, z=7-4t′. Адк.: (-2, 5, 3).
2. ℓ: x=1-2t, y=-1+t, z=1-2t, ℓ': x=4+t′, y=-5+2t′, z=8-3t′. Адк.: (5, -3, 5).
3. ℓ: x=1+t, y=-1+t, z=1+4t, ℓ': x=4+t′, y=-4-2t′, z=5. Адк.: (2, 0, 5).
4. ℓ: x=7+3t, y=-2-t, z=3, ℓ': x=-2, y=5+2t′, z=1-t′. Адк.: (-2, 1, 3).
5. ℓ: x=3t, y=-3+5t, z=-2, ℓ': x=5+t′, y=4+t′, z=2+2t′. Адк.: (3, 2, -2).

Задача 6.

Запішыце розныя выгляды раўнанняў плоскасці, якая задаецца пунктам M_0 і некалінеярнымі вектарамі $\vec{m}$ і $\vec{p}$.

1. $M_0(3, 2, 1)$, $\vec{m}\{2, 5, -1\}$, $\vec{p}\{-1, 3, 7\}$.
2. $M_0(5, -1, 3)$, $\vec{m}\{3, 4, -5\}$, $\vec{p}\{0, 4, 2\}$.
3. $M_0(2, 8, 3)$, $\vec{m}\{5, 0, -1\}$, $\vec{p}\{2, 4, 3\}$.
4. $M_0(1, 1, -1)$, $\vec{m}\{4, 3, 1\}$, $\vec{p}\{3, -1, 2\}$.
5. $M_0(1, 2, -3)$, $\vec{m}\{0, 2, 5\}$, $\vec{p}\{3, 2, -1\}$.

Задача 7.

Складзіце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз пункты A, B, C. Дайце тлумачэнне для выпадку (б) у кожным нумары.

1. а) A(1, 2, 3), B(4, 5, 6), C(5, 7, 9); б) A(3, 5, 1), B(4, 3, 2), C(6, -1, 4).
2. а) A(3, -1, 2), B(-1, 4, 5), C(8, 11, 5); б) A(3, 4, 5), B(-7, -1, 4), C(-17, -6, 3).
3. а) A(2, 5, -6), B(8, 11, 5), C(-2, -5, 3); б) A(2, 5, -6), B(8, 11, 5), C(14, 17, 6).
4. а) A(9, 5, 1), B(4, -3, -2), C(0, 0, 0); б) A(9, -5, 1), B(4, 3, 12), C(-1, 11, 23).
5. а) A(3, 8, 4), B(2, -2, 0), C(1, 0, 0); б) A(2, 5, -6), B(-1, 4, 5), C(-4, 3, 16).

Задача 8.

ABCD – тэтраэдр, E – сярэдзіна канта AB. $R=\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, дзе $\vec{e}_1=\overline{AB}$, $\vec{e}_2=\overline{AC}$, $\vec{e}_3=\overline{AD}$ - афінны рэпер. Напішыце раўнанні наступных плоскасцей у гэтым рэперы:

1) ABC, 2) ADB, 3) BDC, 4) ADC, 5) DEC.

Задача 9.

Запішыце раўнанні 3-х плоскасцей, кожная з якіх праходзіць праз пункт A і кожную з каардынатных восей.

1. A(5, 6, 3). Адк.: y-2z=0, 3x-5z=0, 6x-5y=0.
2. A(4, -2, 7). Адк.: 7y+2z=0, -4z+7x=0, 2x+4y=0.
3. A(-1, 3, 4). Адк.: 4y-3z=0, 4x+z=0, 3x+y=0.
4. A(1, 0, 2). Адк.: y=0, 2x-z=0, y=0.
5. A(2, -1, 5). Адк.: 5y+z=0, 5x-2z=0, x+2y=0.

Задача 10.

Складзіце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз пункт A і прамую ℓ.

1. A(0, 0, 0), ℓ: x=2+2t, y=3-t, z=5-t.
2. A(3, 2, 1), ℓ: x=0, y=0.
3. A(3, -2, 1), ℓ: Ox.
4. A(1, 2, -3), ℓ: Oy.
5. A(1, 3, 4), ℓ: y=0, z=0.

Задача 11.

Высветліце, ці можна правесці плоскасць праз прамыя ℓ і ℓ', калі можна, напішыце раўнанне гэтай плоскасці.

1. ℓ: x=3+2t, y=1-t, z=2+2t, ℓ': x=2t′, y=3+t′, z=-2-2t′.
2. ℓ: x=3-3t, y=1+t, z=1+2t, ℓ': x=2-2t′, y=-1+3t′, z=2+t′.
3. ℓ: x=5t, y=3-2t, z=6t, ℓ': x=3+2t′, y=2-t′, z=1+5t′.
4. ℓ: x=2+4t, y=1-2t, z=3+6t, ℓ': x=-2t′, y=2+t′, z=2-3t′.
5. ℓ: x=1+2t, y=1+3t, z=1+4t, ℓ': x=2+t′, y=2+2t′, z=2+3t′.

Задача 12.

Высветліце, як размешчаны наступныя пары плоскасцей.

1. $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta, \\ y = 2 + \alpha, \\ z = 3 + \alpha - \beta, \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 3 + 2\alpha', \\ y = 2 - 2\alpha' + 3\beta', \\ z = 1 + \alpha' + 4\beta'. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta, \\ y = 2 + \alpha, \\ z = 3 + \alpha - \beta, \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 1 + 4\alpha', \\ y = 3\alpha' + \beta', \\ z = 4 + 2\alpha' + 2\beta'. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta, \\ y = 2 + \alpha, \\ z = 3 + \alpha - \beta, \end{cases}$ і $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha' + \beta', \\ y = 2\alpha' + 2\beta', \\ z = 1 + 3\beta'. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta, \\ y = 2 + \alpha, \\ z = 3 + \alpha - \beta, \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 2 - 3\alpha' + \beta', \\ y = -\alpha' + 3\beta', \\ z = 1 + 3\alpha' - 2\beta'. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta, \\ y = 2 + \alpha, \\ z = 3 + \alpha - \beta, \end{cases}$ і $\begin{cases} x = -2 + \alpha' - 2\beta', \\ y = 1 - \alpha' - \beta', \\ z = 2\alpha' - 2\beta'. \end{cases}$

Задача 13.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз пункт A і паралельная плоскасці П.

1. A(2, 3, 5), П: x+2y-z+3=0.
2. A(-2, 3, 4), П: 2x-y-2z+6=0.
3. A(-1, 2, -3), П: 3x+2y-z+5=0.
4. A(2, -2, 3), П: 2x-y+3z-1=0.
5. A(4, 3, -1), П: x-3y+2z+3=0.

Задача 14.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз пункт A і паралельная прамым ℓ і ℓ'.

1. $A(3, 1, 2)$, $\ell: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$, ℓ': $x=2-4t$, $y=1-2t$, $z=-2+2t$.

2. $A(1, 2, 1)$, $\ell: \frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$, ℓ': $x=2-2t$, $y=1-1{,}5t$, $z=3+0{,}5t$.

3. $A(3, -2, 1)$, ℓ: $x=2+2t$, $y=1-4t$, $z=2-6t$, $\ell': \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$.

4. $A(3, 1, 1)$, ℓ: $x=2t$, $y=2+3t$, $z=3-t$, $\ell': \frac{x+1}{4}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-1}{-2}$.

5. $A(2, 2, 3)$, ℓ: $x=-2+3t$, $y=1-3t$, $z=3-6t$, $\ell': \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-2}$.

Задача 15.

Высветліце ўзаемнае размяшчэнне прамой ℓ і плоскасці П.

1. $\ell: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{4}$, П: $3x-y+2z-1=0$.

2. $\ell: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}$, П: $x-y+3z-1=0$.

3. $\ell: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{4}$, П: $2x-2y+z+1=0$.

4. $\ell: \frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{3}$, П: $x+2y-3z+5=0$.

5. $\ell: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$, П: $3x-y-2z+1=0$.

Задача 16.

Высветліце, пры якіх значэннях m прамая ℓ і плоскасць П не маюць агульных пунктаў.

1. $\ell: \frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{m}$, П: $x-2y+z-1=0$.

2. $\ell: \frac{x-2}{16}=\frac{y}{m}=\frac{z-1}{11}$, П: $x-5y-z+2=0$.

3. $\ell: \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{m}=\frac{z}{4}$, П: $5x-y+5z-9=0$.

4. $\ell: \frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{6}=\frac{z}{m}$, П: $4x+3z-5=0$.

5. $\ell: \frac{x-27}{m}=\frac{y-15}{5}=\frac{z}{1}$, П: $x-2y+z-1=0$.

Задача 17.

Высветліце, пры якіх значэннях A (ці B) і D прамая ℓ ляжыць у плоскасці П.

1. $\ell: \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$, П: Ax+9y-22z+D=0.
2. $\ell: \dfrac{x-2}{16} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{11}$, П: Ax-5y-z+D=0.
3. $\ell: \dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$, П: x+By-4z+D=0.
4. $\ell: \dfrac{x-8}{-7} = \dfrac{y+8}{14} = \dfrac{z}{-7}$, П: Ax-y-4z+D=0.
5. $\ell: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$, П: 4x+By-z+D=0.

Задача 18.

Знайдзіце пункт перасячэння прамой ℓ і плоскасці П.

1. $\ell: \dfrac{x-12}{14} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$, П: 3x+5y-z+32=0. Адк.: (-16, 3, -1).
2. $\ell: \dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$, П: 3x-y+2z-5=0. Адк.: (2, 3, 1).
3. $\ell: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$, П: 2x-y+z+2=0. Адк.: (-1, -3, -3).
4. $\ell: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$, П: x-3y+4z+2=0. Адк.: (-2, 0, 0).
5. $\ell: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$, П: 2x-y+3z+7=0. Адк.: (0, 1, -2).

Задача 19.

Прадстаўце раўнанні кожнай з прамых як лініі перасячэння дзвюх плоскасцей.

1. x=2+3t, y=-1-2t, z=3+t.
2. x=3+5t, y=2-3t, z=1-t.
3. x=5-4t, y=3+t, z=3-t.
4. x=1-6t, y=2t, z=1+5t.
5. x=2-3t, y=3-t, z=3-3t.

Задача 20.

Складзіце кананічныя раўнанні кожнай з наступных прамых.

1. x+2y-z+3=0, 2x-y+2z-1=0.
2. x+y+z-3=0, 3x-2y-z+3=0.
3. 3x-2y+z-3=0, 2x-y+3z-1=0.
4. 2x+3y-2z+5=0, x+2y-2z+3=0.
5. x+2y-2z-1=0, x+y+3=0.

Задача 21.

Складзіце раўнанне плоскасці П у наступных выпадках.

1. П праходзіць праз лінію перасячэння плоскасцей 6x-y+z=0 і 5x+3z-10=0 і паралельная восі Ox.

Адк.: 5y+13z-60=0.

2. П праходзіць праз вось Oz і паралельная прамой 3x-z-5=0, 2x-y-4=0.

Адк.: 2x-y=0.

3. П праходзіць праз вось Oy і паралельная прамой 3x-2y-3=0, 4y-3z-6=0.

Адк.: 2x-z=0.

4. П праходзіць праз вось Ox і паралельная прамой x-y+5z-1=0, 2x+y+3z+2=0.

Адк.: 3y-7z=0.

5. П праходзіць праз вось Oz і паралельная прамой 2x-y-3z+1=0, x+2y+2z+1=0.

Адк.: 7x+4y=0.

<u>Задача 22.</u>

Высветліце, як размешчаны прамая ℓ і плоскасць П.

1. а) $\ell: \begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0, \\ x + 2y - 2z - 3 = 0, \end{cases}$ П: 2x-y+z-2=0. Адк.: ℓ і П – перасякаюцца.

   б) $\ell: \begin{cases} x - 5y - z - 1 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0, \end{cases}$ П: x-5y-z+2=0. Адк.: $\ell \parallel$ П.

2. а) $\ell: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases}$ П: 3x-y+2z-3=0. Адк.: ℓ і П – перасякаюцца.

   б) $\ell: \begin{cases} 2x - 2y + z - 1 = 0, \\ x + 2y + 2z - 2 = 0, \end{cases}$ П: 2x-6y-z+5=0. Адк.: $\ell \parallel$ П.

3. а) $\ell: \begin{cases} 4x - 2y + z - 2 = 0, \\ 2x + y + 2z - 7 = 0, \end{cases}$ П: 4x+3z-12=0. Адк.: ℓ і П – перасякаюцца.

   б) $\ell: \begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z = 0, \end{cases}$ П: x+2y+z-8=0. Адк.: $\ell \parallel$ П.

4. а) $\ell: \begin{cases} x - 5y - z - 1 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0, \end{cases}$ П: x+2y+z-1=0. Адк.: ℓ і П – перасякаюцца.

   б) $\ell: \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0, \end{cases}$ П: x-2y-z-1=0. Адк.: $\ell \parallel$ П.

5. а) $\ell: \begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z = 0, \end{cases}$ П: 3x-y+z+2=0. Адк.: ℓ і П – перасякаюцца.

   б) $\ell: \begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0, \end{cases}$ П: 3x-y+2z-9=0. Адк.: $\ell \parallel$ П.

<u>Задача 23.</u>

Напішыце раўнанні прамой, якая праходзіць праз пункт A і паралельная прамой ℓ.

1. A(3, 0, 1), $\ell: \begin{cases} 2x + 2y + z - 11 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$ Адк.: x=3+5t, y=-3t, z=1-4t.

2. A(1, 3, -2), $\ell: \begin{cases} x + y - z - 4 = 0, \\ 2x - 3y + z + 4 = 0. \end{cases}$ Адк.: x=1+2t, y=3+3t, z=-2+5t.

3. A(5, -1, 3), $\ell: \begin{cases} 3x - y - z - 22 = 0, \\ x + y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$ Адк.: x=5+3t, y=-1+5t, z=3+4t.

4. A(3, 0, 0), $\ell: \begin{cases} 5x - y + 2z - 9 = 0, \\ 3x - y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$ Адк.: x=3+2t, y=8t, z=-t.

5. A(0, 3, 0), $\ell: \begin{cases} 3x - y + 3z - 6 = 0, \\ x + y - z - 4 = 0. \end{cases}$ Адк.: x=-t, y=3+3t, z=2t.

Задача 24.

На плоскасці П знайдзіце такі пункт M, каб сярэдзіна адрэзка MN знаходзілася бы на дадзенай восі каардынат.

1. П: 2x-y+2z+4=0, N(-3, 2, 1), Ox. Адк.: (-2, -2, -1).
2. П: 4x-3y-5z-9=0, N(1, 1, 1), Oz. Адк.: (-1, -1, -2).
3. П: x+3y-2z+5=0, N(3, 4, 1), Oz. Адк.: (-3, -4, 5).
4. П: 3x-y+z-6=0, N(3, -2, 4), Oy. Адк.: (-3, -19, -4).
5. П: 4x-3y-5z-12=0, N(1, 1, 1), Ox. Адк.: (1, -1, -1).

Задача 25.

Вызначыце, пры якім значэнні ℓ плаcкасці $П_1$ і $П_2$ будуць перпендыкулярнымі.

1. $П_1$: 3x-5y+ℓz-3=0, $П_2$: x+3y+2z+5=0.
2. $П_1$: 5x+y-3z-3=0, $П_2$: 2x+ℓy-3z+1=0.
3. $П_1$: x+3y+5z-10=0, $П_2$: ℓx-y+2z-1=0.
4. $П_1$: 2x+ℓy+3z-5=0, $П_2$: x-6y-6z+1=0.
5. $П_1$: 2x-y+2z+5=0, $П_2$: 2x+3y+ℓz+1=0.

Задача 26.

Складзіце раўнанне плоскасці, якая паралельная прамой ℓ і праходзіць праз прамую ℓ'.

1. ℓ: x=y=z, $\ell': \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{1}$.
2. ℓ: x=-1+2t, y=3t, z=-2+t, ℓ': x=2+3t′, y=-1+6t′, z=4t′.
3. ℓ: x=0, y=0, ℓ': x=2+2t, y=2t, z=1+3t.
4. $\ell: \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{2}$, $\ell': \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$.
5. ℓ: x=1+t, y=-2-t, z=5+3t, $\ell': \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z}{2}$.

Задача 27.

Складзіце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз пункт A і прамую ℓ.

1. a) A(4, -3, 1), $\ell: \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-4}{2}$;

б) A(5, 3, 2), $\ell: \begin{cases} x-2y+z=0, \\ 3x-2y+z-2=0. \end{cases}$ Адк.: 3x-8y+4z+1=0.

2. а) A(2, 1, -2), ℓ: x=3+t, y=-1+2t, z=5t;

   б) A(0, 0, 0), $\ell: \begin{cases} 2x-2y+z-2=0, \\ 6x+5y-3z-5=0. \end{cases}$ Адк.: 2x+20y-11z=0.

3. а) A(1, 2, 3), ℓ: x=y=z;

   б) A(2, 2, 3), $\ell: \begin{cases} 3x-2y+z-10=0, \\ 2x+3y-2z+4=0. \end{cases}$ Адк.: 34x-y-2z-60=0.

4. а) A(5, -3, 4), $\ell: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$;

   б) A(2, 0, 0), $\ell: \begin{cases} 2x-3y+8z+4=0, \\ x+2y-z+2=0. \end{cases}$ Адк.: 7y-10z=0.

5. а) A(2, 3, 5), ℓ: x=3-t, y=4+2t, z=6+3t;

   б) A(1, 3, 4), $\ell: \begin{cases} x+2y-5z+1=0, \\ 3x-y-3z-4=0. \end{cases}$ Адк.: 5x-11y+11z-16=0.

Задача 28.

Складзіце раўнанні прамой, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная плоскасці П.

1. A(1, -3, 2), П: 2x-3y+z-1=0.
2. A(3, 1, -1), П: 4x-y+5z+1=0.
3. A(0, 0, 1), П: 2x-y+3z+2=0.
4. A(2, -1, -2), П: 3x+z-2=0.
5. A(1, 2, -3), П: 2y+3z-1=0.

Задача 29.

Складзіце раўнанні плоскасці, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой ℓ.

1. A(3, -2, 1), ℓ: x=1-2t, y=3t, z=-2+t.
2. A(1, 2, -3), ℓ: x=2+t, y=1-t, z=4-3t.
3. A(1, -3, 4), ℓ: x=2+2t, y=-3t, z=-2+5t.
4. A(2, 0, -3), ℓ: x=3-2t, y=-1+2t, z=1-3t.
5. A(1, 1, 3), ℓ: x=1+2t, y=1-2t, z=2.

Задача 30.

Складзіце раўнанні прамой , якая праходзіць праз пункт A, перасякае прамую ℓ і а) ляжыць у плоскасці П, б) паралельная плоскасці П.

1. а) A(2, 4, 1), П: 2x-2y+5z-1=0, $\ell: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$;

   б) A(2, 4, 1), П: 2x-2y+5z+1=0, $\ell: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{1}$.

   Адк.: а) x=2+29t, y=4+9t, z=1+11t; б) x=2+t, y=4+6t, z=1+2t.

2. а) A(1, 2, -1), П: 3x+y+4z-1=0, $\ell: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$;

   б) A(1, 2, -1), П: 3x+y+4z+2=0, $\ell: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Адк.: а) x=1+3t, y=2-t, z=-1-2t; б) x=1+2t, y=2+6t, z=-1-3t.

3. а) A(1, 3, 0), П: 2x+y-3z-5=0, ℓ: x=1+2t, y=2+3t, z=-1+t;

   б) A(1, 3, 0), П: 2x+y-3z+9=0, $\ell: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}$.

   Адк.: а) x=1+2t, y=3+5t, z=3t; б) x=1+2t, y=3+5t, z=3t.

4. а) A(1, 1, 0), П: 3x-2y+z-1=0, ℓ: x=1+t, y=-1-t, z=-t;

   б) A(1, 1, 0), П: 3x-2y+z-8=0, $\ell: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}$.

   Адк.: а) x=1+t, y=1+t, z=-t; б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$.

5. а) A(3, 1, -1), П: x+2y-z-6=0, ℓ: x=1+t, y=2-t, z=2+2t;

   б) A(3, 1, -1), П: x+2y-z+12=0, $\ell: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{2}$.

   Адк.: а) x=3+3t, y=1-2t, z=-1-t; б) $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$.

Задача 31.

Знайдзіце артаганальную праекцыю пункта A на плоскасць П.

1. A(1, 1, 1), П: 3x-y+2z+6=0. Адк.: $(-\frac{8}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{3}{7})$.
2. A(4, 3, 1), П: x+2y-z-3=0. Адк.: (3, 1, 2).
3. A(4, 2, 2), П: 7x+z+20=0. Адк.: (-3, 2, 1).
4. A(3, 0, 4), П: 2x+y+z+4=0. Адк.: (-3, 1, 1).
5. A(3, 4, 1), П: 3x+2y-4=0. Адк.: (0, 2, 1).

Задача 32.

Знайдзіце пункт, сіметрычны пункту P адносна плоскасці П.

1. P(1, 2, 3), П: 2x-3y+5z-49=0. Адк.: (5, -4, 13).
2. P(3, 2, 5), П: x+2y+z-18=0. Адк.: (5, 6, 7).
3. P(2, 3, 5), П: 2x+y-4z-29=0. Адк.: (10, 7, -11).
4. P(5, 4, 7), П: 2x+2y+5z-39=0. Адк.: (3, 2, 3).
5. P(3, 5, -7), П: y-2z-14=0. Адк.: (3, 3, -3).

Задача 33.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз пункты A і B і перпендыкулярная плоскасці П.

1. A(1, 2, 3), B(4, 5, 7), П: 2x-y+5z+1=0. Адк.: 19x-7y-9z+22=0.
2. A(0, 0, 0), B(1, 4, -5), П: x-y+5z+10=0. Адк.: 3x-2y-z=0.
3. A(3, 1, -2), B(4, 2, 1), П: 3x-2y+z+5=0. Адк.: 7x+8y-5z-39=0.
4. A(-1, -2, 0), B(1, 3, 2), П: x-2y-3z+6=0. Адк.: 11x-8y+9z-5=0.
5. A(4, 5, 6), B(5, 7, 6), П: 2x-y+5z-2=0. Адк.: 2x-y-z+3=0.

Задача 34.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая перпендыкулярная плоскасці П і праходзіць праз прамую перасячэння плоскасці П з плоскасцю Oxy.

1. П: x+3y+5z-10=0. Адк.: x+3y-2z-10=0.   4. П: x-y+z+4=0. Адк.: x-y+z+4=0.

2. П: $2x-y+3z-2=0$. Адк.: $3x-3y-5z=0$.

3. П: $x+y-2z+3=0$. Адк.: $x+y+z-3=0$.

5. П: $2x+y-z-2=0$. Адк.: $2x+y+5z-2=0$.

Задача 35.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз пункт M_0 і перпендыкулярная плоскасцям $П_1$ і $П_2$.

1. $M_0(1, 1, 2)$, $П_1$: $2x+3z=0$, $П_2$: $x-y+z-1=0$. Адк.: $3x+y-2z=0$.
2. $M_0(-1, 1, -1)$, $П_1$: $x+2y-z+3=0$, $П_2$: $2x-2y+3z-1=0$. Адк.: $4x-5y-6z+3=0$.
3. $M_0(2, 3, 5)$, $П_1$: $3x-y+2z-1=0$, $П_2$: $2x+y-z+3=0$. Адк.: $x-7y-5z-44=0$.
4. $M_0(1, -2, 3)$, $П_1$: $x++y+z-1=0$, $П_2$: $2x-y-z+1=0$. Адк.: $y-z+5=0$.
5. $M_0(-2, 3, 1)$, $П_1$: $2x+y-z-1=0$, $П_2$: $x+2y+z-1=0$. Адк.: $x-y+z+4=0$.

Задача 36.

Складзіце кананічныя раўнанні ртаганальнай праекцыі прамой ℓ на плоскасць П.

1. $\ell: \frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{4}$, П: $2x-3y+z+4=0$. Адк.: $\frac{x}{-16}=\frac{y-\frac{3}{4}}{-25}=\frac{z+\frac{7}{4}}{-43}$.
2. $\ell: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$, П: $3x-y+2z+8=0$. Адк.: $\frac{x+4}{5}=\frac{y+4}{31}=\frac{z}{8}$.
3. $\ell: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$, П: $x+y-3z+2=0$. Адк.: $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$.
4. $\ell: \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$, П: $3x-2y-z+19=0$. Адк.: $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$.
5. $\ell: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$, П: $3x-y+z-1=0$. Адк.: $\frac{x}{4}=\frac{y}{17}=\frac{z-1}{5}$.

Задача 37.

Знайдзіце аснову перпендыкуляра, праведзенага з пункта P да прамой ℓ.

1. $P(2, -1, 1)$, $\ell: \frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+7}{-3}$. Адк.: $(1, 1, -1)$.
2. $P(1, 2, -3)$, $\ell: \frac{x-6}{4}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-6}{5}$. Адк.: $(2, 5, 1)$.
3. $P(1, 2, -3)$, $\ell: \frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-8}=\frac{z-6}{5}$. Адк.: $(-2, 3, 1)$.
4. $P(2, 5, 1)$, $\ell: \frac{x-9}{4}=\frac{y+14}{-8}=\frac{z-7}{5}$. Адк.: $(1, 2, -3)$.
5. $P(-2, 3, 1)$, $\ell: \frac{x+2}{4}=\frac{y-13}{-8}=\frac{z+4}{5}$. Адк.: $(2, 5, 1)$.

Задача 38.

Знайдзіце пункт, сіметрычны пункту P адносна прамой ℓ.

1. $P(6, 7, 1)$, ℓ: $x=-2+4t$, $y=13-8t$, $z=-4+5t$. Адк.: $(-2, 3, 1)$.
2. $P(0, 3, -3)$, ℓ: $x=5+2t$, $y=-3-2t$, $z=-7-3t$. Адк.: $(2, -1, 1)$.
3. $P(3, 8, 5)$, ℓ: $x=6+4t$, $y=-3-8t$, $z=6+5t$. Адк.: $(1, 2, -3)$.

4. P(-5, 4, 5), ℓ: x=2+4t, y=-5-8t, z=6+5t. Адк.: (1, 2, -3).
5. P(0, -1, -7), ℓ: x=9+4t, y=-14-8t, z=7+5t. Адк.: (2, 5, 1).

Задача 39.

Складзіце раўнанне плоскасці П, якая праходзіць праз прамую перасячэння плоскасцей 2x-y+5z-3=0 і x+y-2z+3=0 і здавальняе наступнай умове:

1. П ∥ Ox. Адк.: y-3z+3=0.
2. П паралельная прамой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$. Адк.: y-3z+3=0.
3. П ∥ Oy. Адк.: x+z=0.
4. П адсякае на восі Ox накіраваны адрэзак, велічыня якога роўная 5.

   Адк.: 9x-15y+54z-45=0.
5. П адсякае на восях Ox і Oz накіраваныя адрэзкі, велічыні якіх роўныя.

   Адк.: x+z=0.

Задача 40.

Пучок плоскасцей зададзены плоскасцямі 2x+y-3z+2=0 і 5x+5y-4z+3=0. Знайдзіце раўнанне плоскасці гэтага пучка, якая перпендыкулярная плоскасці П.

1. П: x-y+3z-1=0. Адк.: 4x+7y+z=0.
2. П: 2x+y-z+2=0. Адк.: 2x+21y+25z-14=0.
3. П: 3x-2y+4z-5=0. Адк.: 18x+29y+z+2=0.
4. П: x+y+2z+2=0. Адк.: 19x+17y-18z+13=0.
5. П: 4x-y+3z-1=0. Адк.: 16x+13y-17z+12=0.

Задача 41.

Вызначце, ці перасякае плоскасць П адрэзак AB.

1. П: 3x-4y-2z+5=0, A(3, -2, 1), B(-2, 5, 2).
2. П: 2x-4y+z+14=0, A(-3, 1, 5), B(5, 4, 2).
3. П: 5x-2y+z-1=0, A(1, 4, -3), B(2, 5, 0).
4. П: x+y-2z+2=0, A(0, 0, 2), B(1, 3, -1).
5. П: 2x-y+5z-1=0, A(1, 1, 1), B(1, -3, -2).

Задача 42.

Вызначце адлегласць паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі П і П′.

1. П: x-2y-2z-12=0, П′: x-2y-2z-6=0. Адк.: 2.
2. П: 2x-3y+6z-14=0, П′: 4x-6y+12z+21=0. Адк.: $\frac{7}{2}$.
3. П: 2x-y+2z+9=0, П′: 4x-2y+4z-13=0. Адк.: $\frac{31}{6}$.
4. П: 2x-2y+z-1=0, П′: 2x-2y+z+5=0. Адк.: 2.
5. П: x+y-3z+8=0, П′: x+y-3z+18=0. Адк.: $\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Задача 43.

1. На восі Oz знайдзіце пункт, які аддалены ад плоскасці $2x+2y-z+6=0$ на адлегласць, роўную 3.

Адк.: (0, 0, -3), (0, 0, 15).

2. На восі Ox знайдзіце пункт, роўнааддалены ад пункта $A(5, 3, \sqrt{12})$ і ад плоскасці $4x-3y+13=0$.

Адк.: (3, 0, 0), $(\frac{109}{3}, 0, 0)$.

3. Складзіце раўнанне плоскасці, якая паралельная плоскасці $2x+y-4z+5=0$ і аддаленая ад пункта (1, 2, 0) на адлегласць $\sqrt{21}$.

Адк.: $2x+y-4z+17=0$, $2x+y-4z-25=0$.

4. Напішыце раўнанне плоскасці, якая адсякае на восях каардынат адрэзкі, прапарцыянальныя лікам 1, 2, 3 і аддаленая ад пункта (3, 5, 7) на адлегласць 4.

Адк.: $6x+3y+2z-75=0$, $6x+3y+2z-19=0$.

5. На восі Oy знайдзіце пункт, роўнааддалены ад дзвюх плоскасцей Π_1: $x+2y-2z-1=0$, Π_2: $3x+5=0$.

Адк.: (0, 3, 0), (0, -2, 0).

Задача 44.

Знайдзіце адлегласць ад пункта A да прамой ℓ.

1. A(1, 3, -1), $\ell: \frac{x-12}{10}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+15}{-15}$. Адк.: $3\sqrt{3}$.
2. A(-1, 3, 2), $\ell: \frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$. Адк.: $\sqrt{11}$.
3. A(0, 2, 1), $\ell: \frac{x-8}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-15}{1}$. Адк.: $\sqrt{11}$.
4. A(1, -3, 2), $\ell: \frac{x+4}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$. Адк.: $\sqrt{38}$.
5. A(3, 2, -1), $\ell: \frac{x-20}{22}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-27}{23}$. Адк.: $\sqrt{51}$.

Задача 45.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая паралельная плоскасці Π і аддаленая ад яе на адлегласць ρ.

1. Π: $48x+39y-20z=0$, $\rho=2$. Адк.: $48x+39y-20z\pm130=0$.
2. Π: $2x-3y+6z-3=0$, $\rho=3$. Адк.: $2x-3y+6z-24=0$, $2x-3y+6z+18=0$.
3. Π: $x+2y+2z-5=0$, $\rho=1$. Адк.: $x+2y+2z-2=0$, $x+2y+2z-8=0$.
4. Π: $6x-3y+2z-8=0$, $\rho=3$. Адк.: $6x-3y+2z+13=0$, $6x-3y+2z-29=0$.
5. Π: $2x-2y+z-3=0$, $\rho=5$. Адк.: $2x-2y+z+12=0$, $2x-2y+z-18=0$.

Задача 46.

Дакажыце, што прамыя ℓ і ℓ' - паралельныя прамыя. Знайдзіце адлегласці паміж імі.

1. $\ell: \begin{cases} x - 3y + 2z - 6 = 0, \\ 2x + y + 3z + 2 = 0, \end{cases}$ $\ell': \dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-7}$. Адк.: $\sqrt{\dfrac{138}{57}}$.

2. $\ell: \begin{cases} 2x - y + 3z + 3 = 0, \\ x + y + z + 3 = 0, \end{cases}$ $\ell': \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z-1}{-6}$. Адк.: $\sqrt{\dfrac{765}{13}}$.

3. $\ell: \begin{cases} 2x - 5y - z - 21 = 0, \\ x \quad 4y - 7 = 0, \end{cases}$ $\ell': \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$. Адк.: $\sqrt{\dfrac{975}{13}}$.

4. $\ell: \begin{cases} 5x + y - 5z + 7 = 0, \\ 10x - y - 5z + 8 = 0, \end{cases}$ $\ell': \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-3}{3}$. Адк.: $\sqrt{\dfrac{23}{19}}$.

5. $\ell: \begin{cases} 3x - y - 6z - 6 = 0, \\ x - 8y - 3z + 24 = 0, \end{cases}$ $\ell': \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{2}$. Адк.: $\sqrt{\dfrac{2027}{38}}$.

Задача 47.

Дакажыце, што прамыя ℓ і ℓ' – скрыжавальныя прамыя. Знайдзіце адлегласць паміж імі.

1. ℓ: x=5-t, y=2+2t, z=-1-3t, ℓ': x=1+t′, y=-3+3t′, z=-2t′. Адк.: $\dfrac{25}{\sqrt{66}}$.

2. ℓ: x=1+2t, y=2+5t, z=3-t, ℓ': x=2+t′, y=-1+3t′, z=-2-2t′. Адк.: $\dfrac{21}{\sqrt{59}}$.

3. ℓ: x=3t, y=2-2t, z=1-t, ℓ': x=2+3t′, y=3+5t′, z=2+2t′. Адк.: $\dfrac{14}{\sqrt{223}}$.

4. ℓ: x=1+t, y=-2t, z=-1+4t, ℓ': x=3+2t′, y=1+t′, z=1+3t′. Адк.: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

5. ℓ: x=2+2t, y=1+t, z=-3-3t, ℓ': x=1+t′, y=1, z=1+2t′. Адк.: $\dfrac{6}{\sqrt{54}}$.

Задача 48.

На зададзенай восі каардынат знайдзіце пункт, які роўнааддалены ад плоскасцей Π_1 і Π_2.

1. Ox, Π_1: 2x-y+3z-5=0, Π_2: 3x+2y-z+4=0. Адк.: (-9, 0, 0), ($\dfrac{1}{5}$, 0, 0).

2. Oz, Π_1: 4x+3z-1=0, Π_2: 3x-12y+4z+5=0. Адк.: (0, 0, 2), (0, 0, $-\dfrac{12}{59}$).

3. Oy, Π_1: 4x+3y-1=0, Π_2: 3x-12y+4z+5=0. Адк.: (0, $\dfrac{1}{5}$, 0), (0, $\dfrac{19}{30}$, 0).

4. Oz, Π_1: 2x-y+3z-5=0, Π_2: 3x+2y-z+3=0. Адк.: (0, 0, 2), (0, 0, 1).

5. Ox, Π_1: 3x+4y-2z+5=0, Π_2: 2x-3y-4z-9=0. Адк.: (-2, 0, 0), ($\dfrac{4}{11}$, 0, 0).

Задача 49.

Дадзены раўнанні дзвюх плоскасцей Π_1 і Π_2. На восі Oz знайдзіце

пункт, адлегласць якога да плоскасці Π_1 у два разы больш адлегласці яго да плоскасці Π_2.

1. Π_1: x-2y+3z-1=0, Π_2: 3x+2y+z-2=0. Адк.: (0, 0, 1), (0, 0, -3).
2. Π_1: 2x+2y+3z-2=0, Π_2: 6x-4y+4z-3=0. Адк.: (0, 0, 1), $(0, 0, \frac{5}{7})$.
3. Π_1: 2x+5y+z-3=0, Π_2: 10x-4y+2z-3=0. Адк.: (0, 0, 0), (0, 0, 2).
4. Π_1: 5x+3y+z-3=0, Π_2: 6x+10y+2z-5=0. Адк.: (0, 0, 2), $(0, 0, \frac{8}{3})$.
5. Π_1: x+2y+z-5=0, Π_2: 3x+6y+3z-2=0. Адк.: $(0, 0, -\frac{3}{11})$, $(0, 0, \frac{19}{9})$.

Задача 50.

Знайдзіце раўнанне фігуры, пункты якой роўнааддаленыя ад двух пунктаў A і B.

1. A(2, 3, 1), B(3, 1, 3). Адк.: 2x-4y+4z-5=0.
2. A(1, 0, 1), B(4, 4, 2). Адк.: 3x+4y+z-17=0.
3. A(1, 2, 3), B(3, -1, 2). Адк.: 2x-3y-z=0.
4. A(3, -1, 2), B(-3, -2, -1). Адк.: 6x+y+3z=0.
5. A(2, 1, -3), B(3, 3, -2). Адк.: x+2y+z-9=0.

Задача 51.

Знайдзіце раўнанне фігуры, пункты якой роўнааддаленыя ад пунктаў A, B,C, якія не ляжаць на адной прамой.

1. A(2, 3, 1), B(0, 1, -1), C(0, 1, 1). Адк.: $\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{1}$, z=0.
2. A(1, 0, 1), B(3, -2, 1), C(1, 2, 1). Адк.: x-y-3=0, y-1=0 (можна запісаць: x=4, y=1, z – любы лік.).
3. A(1, 2, 3), B(3, 4, 1), C(3, 4, 5). Адк.: $\frac{x}{-1} = \frac{y-6}{1}$, z=3.
4. A(3, -1, 2), B(1, -3, 4), C(-1, -5, 6). Адк.: $\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1}$, z=7.
5. A(2, 1, -3), B(4, 1, 1), C(2, 3, 1). Адк.: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$.

Задача 52.

На плоскасці П знайдзіце пункт, роўнааддалены ад пунктаў A, B, C.

1. П: 2x-y+z-3=0, A(2, 3, 1), B(0, 1, -1), C(0, 1, 0). Адк.: $(\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{1}{2})$.
2. П: 4x-2y+2z+1=0, A(1, 0, 1), B(2, -1, 0), C(2, 1, 1). Адк.: $(1, 1, -\frac{3}{2})$.
3. П: 2x-y+z-3=0, A(1, 2, 3), B(3, 4, 1), C(1, 2, 5). Адк.: (2, 5, 4).
4. П: 3x-2y+z-3=0, A(3, -1, 2), B(1, -3, 2), C(-1, -3, 4). Адк.: (0, 0, 3).
5. П: 3x-2y+z-10=0, A(2, 1, -3), B(4, 5, 1), C(2, 3, 1). Адк.: (5, 2, -1).

Задача 53.

Дакажыце, што каля адвольнага тэтраэдра можна апісаць сферу. Знайдзіце цэнтр і радыус сферы, апісанай каля тэтраэдра з вяршынямі A, B, C, D.

1. A(2, 3, 1), B(0, 1, -1), C(0, 1, 0), D(3, 1, 3). Адк.: $(\frac{7}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, R=$\sqrt{\frac{27}{2}}$.
2. A(1, 0, 1), B(2, -1, 0), C(2, 1, 1), D(4, 4, 2). Адк.: $(\frac{25}{2}, -\frac{21}{2}, \frac{43}{2})$, R=$\frac{\sqrt{2651}}{2}$.
3. A(1, 2, 3), B(3, 4, 1), C(1, 2, 5), D(3, -1, 2). Адк.: (5, 2, 4), R=17.
4. A(3, -1, 2), B(1,-3, 2), C(-1,-3, 4), D(-3,-2,-1). Адк.: $(-\frac{9}{20}, -\frac{9}{10}, \frac{6}{5})$, R=$\frac{\sqrt{5021}}{20}$.
5. A(2, 1, -3), B(4, 1, 1), C(2, 3, 1), D(3, 3, -2). Адк.: $(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{4})$, R=$\frac{\sqrt{83}}{4}$.

Задача 54.

Складзіце раўнанне плоскасці, якая аддалена ад пачатку каардынат на адлегласць ρ і адсякае на восях каардынат накіраваныя адрэзкі, велічыні якіх прапарцыянальныя лікам m, n, p.

1. ρ=10, m=2, n=3, p=5. Адк.: 15x+10y+6z-190=0.
2. ρ=4, m=1, n=-2, p=3. Адк.: 6x-3y+2z-28=0.
3. ρ=5, m=-2, n=-5, p=3. Адк.: 15x+6y-10z+95=0.
4. ρ=3, m=3, n=-1, p=-2. Адк.: 2x-6y-3z-21=0.
5. ρ=5, m=2, n=-5, p=7. Адк.: 35x-14y+10z-195=0.

Задача 55.

Напішыце раўнанні агульнага перпендыкуляра да скрыжавальных прамых ℓ і ℓ'.

1. $\ell: \frac{x+7}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$, ℓ': x=1+t, y=-8+2t, z=-12-t.

Адк.: $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-4}$.

2. $\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$, ℓ': x=2+3t, y=-1+t, z=-3t.

Адк.: $\begin{cases} x+2y+4z+1=0, \\ 8x+9y+11z-7=0. \end{cases}$

3. ℓ: x=2+t, y=3+2t, z=1-t, ℓ': $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Адк.: $\begin{cases} x-2y-3z+7=0, \\ x+2y-z-4=0. \end{cases}$

4. ℓ: x=1+2t, y=2-3t, z=1, ℓ': $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{-2}$.

Адк.: $\begin{cases} 5x+18y-17z-24=0, \\ 5x+18y+17z-13=0. \end{cases}$

5. ℓ: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$, ℓ': x=2t, y=-1+t, z=-7t.

Адк.: $\begin{cases} 4x-y-5z-12=0, \\ 22x-16y+4z-16=0. \end{cases}$

Задача 56.

Напішыце раўнанні прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння плоскасці П з прамой ℓ, ляжыць у плоскасці П і перпендыкулярная прамой ℓ.

1. П: 2x-3y-z-5=0, ℓ: x=5-t, y=-5+3t, z=-4+t. Адк.: x=3, y=1-t, z=-2+3t.
2. П: x-2y-2z-5=0, ℓ: x=4+t, y=3+2t, z=-4-2t. Адк.: x=3+2t, y=1, z=-2+t.
3. П: 3x-2y-z-4=0, ℓ: x=4+3t, y=-1+t, z=2-t. Адк.: x=1+t, y=-2, z=3+3t.
4. П: 4x-3y-3z-1=0, ℓ: x=2+t, y=-1+t, z=5+2t. Адк.: x=1+3t, y=-2+11t, z=3-7t.
5. П: 2x-3y+z-1=0, ℓ: x=2+t, y=2+2t, z=t. Адк.: x=1-5t, y=-t, z=-1+7t.

Задача 57.

Вызначце адлегласць паміж дзвюма паралельнымі прамымі ℓ і ℓ'.

1. ℓ: x=1+t, y=1+t, z=1+t, ℓ': x=2+3t′, y=-2+3t′, z=3+3t′. Адк.: $\sqrt{14}$.
2. ℓ: x=8+3t, y=2+4t, z=5+2t, ℓ': x=3+3t′, y=4t′, z=2+2t′. Адк.: 3.
3. ℓ: x=2+4t, y=-6t, z=-1-8t, ℓ': x=7-6t′, y=2+9t′, z=12t′. Адк.: $\sqrt{30}$.
4. ℓ: x=4+2t, y=-1+t, z=-2-2t, ℓ': x=5+2t′, y=1+t′, z=-3-2t′. Адк.: $\sqrt{2}$.
5. ℓ: x=2+2t, y=3-t, z=5+2t, ℓ': x=2+2t′, y=-1-t′, z=3+2t′. Адк.: $\sqrt{13}$.

Задача 58.

Вызначце адлегласць паміж дзвюма скрыжавальнымі прамымі ℓ і ℓ'.

1. ℓ: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{7}$, ℓ': x=0, $\frac{y-3}{1}=\frac{z-6}{-1}$. Адк.: $\frac{17}{\sqrt{102}}$.
2. ℓ: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$, ℓ': $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{3}$. Адк.: $\frac{18}{\sqrt{110}}$.
3. ℓ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}$, z=1, ℓ': $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{-2}$. Адк.: $\frac{\sqrt{22}}{2}$.
4. ℓ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$, ℓ': $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$. Адк.: $\frac{9}{\sqrt{14}}$.
5. ℓ: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-1}$, ℓ': $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$. Адк.: $\frac{6}{\sqrt{21}}$.

Задача 59.

Вызначце косінусы вуглоў паміж прамымі ℓ і ℓ'.

1. ℓ: x=1+t, y=-8+2t, z=-12-t, ℓ': x=-7+3t′, y=4-2t′, z=4+3t′. Адк.: $-\frac{2}{\sqrt{33}}$.

2. ℓ: x=-t, y=2+3t, z=3t, ℓ': x=3+t′, y=1-t′, z=2+2t′. Адк.: $\frac{2}{\sqrt{114}}$.

3. ℓ: x=1+2t, y=1+t, z=-1-t, ℓ': x=2+3t′, y=-1+t′, z=-2t′. Адк.: $\frac{9}{2\sqrt{21}}$.

4. ℓ: x=2+t, y=1+t, z=-1+t, ℓ': x=2t′, y=-1+t′, z=-7t′. Адк.: $-\frac{4}{9\sqrt{2}}$.

5. ℓ: x=2+2t, y=3+2t, z=1-2t, ℓ': x=3-t′, y=1+2t′, z=1+3t′. Адк.: 0.

Задача 60.

Вызначце косінусы вуглоў паміж плоскасцямі П і П′.

1. П: 2x-y+3z-1=0, П′: 2x+y+z-3=0. Адк.: $\frac{3}{\sqrt{21}}$.

2. П: x+y+z-3=0, П′: 3x+2y-z-5=0. Адк.: $\frac{6}{\sqrt{42}}$.

3. П: 2x-y+4z-1=0, П′: x+2y+4z+2=0. Адк.: $\frac{16}{21}$.

4. П: 3x-y+2z-5=0, П′: 2x+2y+7=0. Адк.: $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

5. П: 3x-4y+z-8=0, П′: 2y+3z+9=0. Адк.: $-\frac{5}{13\sqrt{2}}$.

Задача 61.

Вызначце вугал паміж прамой ℓ і плоскасцю П.

1. ℓ: x=2t, y=1+3t, z=-2+5t, П: 3x+5y-4z+2=0. Адк.: $\arcsin\frac{1}{10\sqrt{19}}$.

2. ℓ: x=1-t, y=2t, z=-1+t, П: 2x+3y+2z-5=0. Адк.: $\arcsin\frac{6}{\sqrt{102}}$.

3. ℓ: x=1+3t, y=t, z=2-2t, П: 2x-y+5z-1=0. Адк.: $\arcsin\frac{5}{2\sqrt{105}}$.

4. ℓ: x=2+5t, y=-1-2t, z=1+t, П: 2x+5y+z-8=0. Адк.: $\arcsin\frac{1}{30}$.

5. ℓ: x=1+3t, y=-1+t, z=-3-t, П: x-y-3z+2=0. Адк.: $\arcsin\frac{5}{11}$.

Задача 62.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз прамую ℓ і ўтварае з плоскасцю П вугал φ.

1. ℓ=Oz, П: 2x+y-$\sqrt{5}$z-7=0, $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Адк.: x+3y=0 і 3x-y=0.

2. $\ell:\ \begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$ П: x-4y-8z+12=0, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Адк.: x+20y+7z-12=0 і x-z+4=0.

3. ℓ=Ox, П: x+y+z+2=0, $\varphi=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Адк.: y+z=0.

4. $\ell:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$, П: 2x-2y+z+2=0, $\varphi=\arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Адк.: x+y+z-5=0 і 11x+35y+23z-115=0.

5. ℓ: x=1, y=-1+2t, z=1+t, П: 3y+4z-2=0, $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$.

Адк.: 2x-y+2z-5=0 і 2x+y-2z+1=0.

Задача 63.

Напішыце раўнанне плоскасці, якая праходзіць праз прамую ℓ і ўтварае вугал φ з прамой m.

1. $\ell:\ \frac{x+7}{-2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z}{1}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$, m: $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

Адк.: 2x+y+z+8=0 і 14x+13y-11z+20=0.

2. $\ell:\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$, $\varphi=30^\circ$, m: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z+2}{-1}$.

Адк.: x+y-2z+3=0 і x-2y+3z=0.

3. $\ell:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, m: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$.

Адк.: 3x-2y-z+3=0 і 3x-y-2z+3=0.

4. $\ell:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$, $\sin\varphi=\frac{2}{15}$, m: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$.

Адк.: 3x-4y-7=0 і 5x+8y-44z+91=0.

5. $\ell:\ \frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}$, $\sin\varphi=\frac{5}{14}$, m: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Адк.: 2x+y-11z+1=0 і 2x-3y+z+5=0.

§ 4. Пераўтварэнне каардынат

1. Кароткія тэарэтычныя звесткі

– Агульныя формулы пераўтварэння афінных каардынат на плоскасці.

$R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ - афінны рэпер, $R'=\{0',\vec{e}'_1,\vec{e}'_2\}$ - новы афінны рэпер, дзе $0'(x_0, y_0)$, $\vec{e}'_1\{c_{11}, c_{21}\}$, $\vec{e}'_2\{c_{12}, c_{22}\}$, каардынаты пункта $0'$ і вектараў $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ зададзены адносна рэпера R.

x, y – каардынаты адвольнага пункта адносна ў рэперы R, x', y' - каардынаты гэтага пункта адносна новага рэпера R'. Тады

$x=c_{11}x'+c_{12}y'+x_0$, $y=c_{21}x'+c_{22}y'+y_0$.

Матрыца $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - матрыца пераўтварэння каардынат, $\det C \neq 0$.

Прыватныя выпадкі.

1. $O'=O$, базісныя вектары мяняюцца: $x=c_{11}x'+c_{12}y'$, $y=c_{21}x'+c_{22}y'$.

2. $O'\neq O$, $\vec{e}_1'=\vec{e}_1$, $\vec{e}_2'=\vec{e}_2$, $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$.

– Формулы пераўтварэння каардынат ортаўнармаваных рэпераў на плоскасці.

$R=\{O,\vec{i},\vec{j}\}$, $R'=\{O',\vec{i}',\vec{j}'\}$, дзе $O(x_0, y_0)$, $\vec{i}\{\cos\varphi,\sin\varphi\}$, $\vec{j}\{-\sin\varphi,\cos\varphi\}$, $\varphi=\angle(\vec{i}',\vec{i})$, тады

$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi+x_0$,

$y=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi+y_0$, калі рэперы аднолькава арыентаваныя,

$C=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ - матрыца C з'яўляецца ортаганальнай, $\det C=1$.

$x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi+x_0$, $y=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi+y_0$, калі рэперы процілегла арыентаваныя, матрыца C пераўтварэння каардынат з'яўляецца ортаганальнай, $\det C=-1$.

– Формулы пераўтварэння афінных каардынат у прасторы.

$R=\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, $R'=\{O',\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$, дзе $O'(x_0,y_0)$, $\vec{e}_1'\{c_{11},c_{21},c_{31}\}$, $\vec{e}_2'\{c_{12},c_{22},c_{32}\}$, $\vec{e}_3'\{c_{13},c_{23},c_{33}\}$, тады

$$\left.\begin{aligned} x&=c_{11}x'+c_{12}y'+c_{13}z'+x_0,\\ y&=c_{21}x'+c_{22}y'+c_{23}z'+y_0,\\ z&=c_{31}x'+c_{32}y'+c_{33}z'+z_0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}, \det C\neq 0.$$

– Формулы пераўтварэння прамавугольных каардынат у прасторы маюць выгляд (1), пры ўмове, што матрыца C з'яўляецца ортаганальнай.

2. Прыклады рашэння задач

<u>Задача 1^0.</u>

$R=\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ і $R'=\{O',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ - два афінных рэперы. Старыя каардынаты x, y адвольнага пункта выражаюцца праз яго новыя каардынаты x', y' па формулах: $x=x'-2y'-3$, $y=3x'-y'+1$. 1. Выразіце каардынаты x', y' адвольнага пункта праз яго старыя каардынаты. 2. Выразіце каардынаты пункта O, а таксама каардынаты вектараў $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ праз новыя каардынаты.

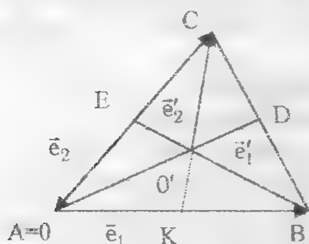
Рашэнне.

З сістэмы $\begin{cases} x = x' - 2y' - 3, \\ y = 3x' - y' + 1 \end{cases}$ можна выразіць x', y'. Атрымліваем $x' = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}$; $y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{7}{4}$. З апошніх формул знаходзім: пункт O адносна рэпера R' мае каардынаты $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}\right)$, вектары $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ маюць адпаведна каардынаты $\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$ і $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Задача 2^0.

ABC – трохвугольнік, AD і BE – яго медыяны, $0'$ - пункт перасячэння медыян. $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, дзе 0=A, $\vec{e}_1 = \overline{AB}$, $\vec{e}_2 = \overline{AC}$ - стары рэпер, $R' = \{0', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$, дзе $\vec{e}_1' = \overline{0'B}$, $\vec{e}_2' = \overline{0'C}$ - новы рэпер. Выразіце каардынаты x, y адвольнага пункта праз яго новыя каардынаты.

Рашэнне.



Рыс. 25.

Каб запісаць формулы пераўтварэння каардынат, неабходна ведаць каардынаты новага пачатку $0'$ і каардынаты новых базісных вектараў $\vec{e}_1'$ і $\vec{e}_2'$ у старым рэперы R. (Рыс. 25.). $0'$ - пункт перасячэння медыян мае такія каардынаты, як яго радыус-вектар $\overline{00'}$.

$\overline{00'} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2$; значыць, $0'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$\vec{e}_1' = \frac{2}{3}\overline{EB} = \frac{2}{3}(\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2) = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2,$$

$$\vec{e}_2' = \frac{2}{3}\overline{KC} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2.$$

Формулы пераўтварэння каардынат: $x = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$.

Адк.: $x = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$.

Задача 3^0.

Напішыце формулы пераўтварэння каардынат ортаўнармаваных рэпераў $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ і $R' = \{0', \vec{i}', \vec{j}'\}$, калі $\vec{j}' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $0'$ мае

каардынаты -2, 1 у старым рэперы. Рэперы R і R′ маюць аднолькавую арыентацыю.

Рашэнне.

Базісныя вектары $\vec{i}'$ і $\vec{j}'$ адносна рэпера R маюць каардынаты $\vec{i}'\{\cos\varphi, \sin\varphi\}$, $\vec{j}'\{-\sin\varphi, \cos\varphi\}$, $\varphi = \angle(\vec{i}', \vec{i})$. Таму $\vec{i}' = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$, $\vec{j}' = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$. На падставе задачы $\vec{j}' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. Таму $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Формулы пераўтварэння рэпераў прымаюць выгляд:

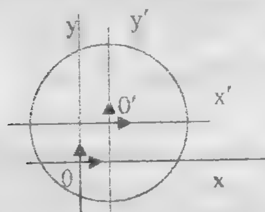
$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2,$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1.$$

Адк.: $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1$.

Задача 4^0.

Адносна артаўнармаванага рэпера $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ некаторая лінія зададзена раўнаннем $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$. Знайдзіце раўнанне гэтай лініі ў новым рэперы, які атрыманы з рэпера R пераносам яго у пункт $0'(2, 3)$ і паваротам на вугал 90°. Высветліце, якая гэта лінія.

Рашэнне.



Рыс. 26.

Запішам формулы пераўтварэння каардынат пры зададзеных умовах:

$$x = x'\cos 90° - y'\sin 90° + 2,$$
$$y = x'\sin 90° + y'\cos 90° + 3.$$

ці $x = -y' + 2$, $y = x' + 3$.

Падставім значэнні x і y, выражаныя праз новыя каардынаты x' і y', у раўнанне лініі.

Атрымаем $(2 - y')^2 - 4(2 - y') + (x' + 3)^2 - 6(x + 3) - 12 = 0$; пасля спрашчэння: $x'^2 + y'^2 = 25$. Гэта ёсць раўнанне акружнасці (рыс. 26).

Адк.: $x'^2 + y'^2 = 25$, акружнасць.

3. Задачы для самастойнага рашэння

Задача 1.

Знайдзіце каардынаты новых базісных вектараў і новага пачатку каардынат у старым афінным рэперы, калі дадзены наступныя формулы

пераўтварэння каардынат.

1. $x=x'-3y'$, $y=x'+2y'+1$.
2. $x=x'-y'$, $y=y'$.
3. $x=x'+y'$, $y=3x'-y'-1$.
4. $x=2x'-y'+3$, $y=x'-3y'+1$.
5. $x=x'+y'-1$, $y=2x'-3y'+2$.

Задача 2.

Напішыце формулы пераўтварэння афінных каардынат, а таксама знайдзіце новыя каардынаты пунктаў A і B, калі дадзены каардынаты новага пачатку і новых каардынатных вектараў у старым рэперы.

1. $O'(0, 3, -1)$, $\vec{e}_1'\{1, 3, 0\}$, $\vec{e}_2'\{0, -3, 1\}$, $\vec{e}_3'\{1, 1, -2\}$, $A(1, -1, 0)$, $B(3, 1, 1)$.
2. $O'(0, 0, 1)$, $\vec{e}_1'\{1, -1, 0\}$, $\vec{e}_2'\{1, 2, 3\}$, $\vec{e}_3'\{1, -2, 0\}$, $A(1, 0, 1)$, $B(3, 1, -2)$.
3. $O'(2, 1, -1)$, $\vec{e}_1'\{-1, 1, 0\}$, $\vec{e}_2'\{2, -1, 0\}$, $\vec{e}_3'\{0, -1, 5\}$, $A(0, 3, -1)$, $B(0, 0, -1)$.
4. $O'(1, 0, -1)$, $\vec{e}_1'\{0, 1, 2\}$, $\vec{e}_2'\{-1, 3, -2\}$, $\vec{e}_3'\{-2, -1, 3\}$, $A(0, 0, 0)$, $B(-2, -2, 3)$.
5. $O'(1, 3, 4)$, $\vec{e}_1'\{-3, 2, 1\}$, $\vec{e}_2'\{0, 0, -1\}$, $\vec{e}_3'\{-1, -3, -2\}$, $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 3, -1)$.

Задача 3.

Знайдзіце новыя афінныя каардынаты пунктаў A, B, C у рэперы, які атрыманы паралельным пераносам дадзенага рэпера, калі за пачатак каардынат узяты пункт O'.

1. $A(3, -2)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 0)$, $O'(3, 2)$.
2. $A(1, 3)$, $B(0, 4)$, $C(0, 0)$, $O'(-1, 3)$.
3. $A(4, 5)$, $B(-2, 0)$, $C(0, 0)$, $O'(-3, -2)$.
4. $A(2, -5)$, $B(0, -1)$, $C(0, 0)$, $O'(-1, 3)$.
5. $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(2, -1)$, $O'(-6, 1)$.

Задача 4.

Афінны рэпер R' атрыманы шляхам паралельнага пераносу рэпера R. Пункт A мае адносна рэпера R каардынаты x, y, а адносна рэпера R' - каардынаты x', y'. Знайдзіце адносна рэпера R і рэпера R' каардынаты сярэдзіны адрэзка, які злучае пачаткі каардынат гэтых рэпераў.

1. $x=3$, $y=-3$; $x'=-2$, $y'=-7$. Адк.: $(\frac{5}{2}, 2)$, $(-\frac{5}{2}, -2)$.
2. $x=3$, $y=4$; $x'=-2$, $y'=-5$. Адк.: $(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$, $(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2})$.
3. $x=3$, $y=5$; $x'=5$, $y'=7$. Адк.: $(-1, -1)$, $(1, 1)$.
4. $x=5$, $y=7$; $x'=3$, $y'=5$. Адк.: $(1, 1)$, $(-1, -1)$.
5. $x=4$, $y=9$; $x'=6$, $y'=3$. Адк.: $(-1, 3)$, $(1, -3)$.

Задача 5.

Адносна афіннага рэпера $R=\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ дадзены пункты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. У новым рэперы $R'=\{0', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ гэтыя пункты маюць каардынаты $A(x_1', y_1')$, $B(x_2', y_2')$, $C(x_3', y_3')$. Напішыце формулы пераўтварэння каардынат.

1. R: $A(0, 2)$, $B(3, 3)$, $C(3, -2)$; R': $A(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(0, -1)$.

Адк.: $x=3x'-2y'+1$, $y=x'+y'-1$.

2. R: A(-1, -2), B(-1, -1), C(4, 11); R′: A(1, 2), B(0, 1), C(3, -1).

Адк.: $x=x'-y'$, $y=2x'-3y'+2$.

3. R: A(1, 0), B(4, 0), C(9, 1); R′: A(0, 0), B(1, -1), C(3, -2).

Адк.: $x=2x'-y'+1$, $y=x'+y'$.

4. R: A(-2, 13), B(-1, 5), C(-1, 12); R′: A(1, 2), B(0, 1), C(2, 0).

Адк.: $x=x'+2y'-3$, $y=5x'+3y'+2$.

5. R: A(0, 0), B(-1, 5), C(-1, -8); R′: A(1, 1), B(0, 1), C(2, 0).

Адк.: $x=x'+2y'-3$, $y=-5x'+3y'+2$.

Задача 6.

$R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ і $R'=\{0',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ - два афінныя рэперы. Старыя каардынаты x, y адвольнага пункта выражаюцца праз яго новыя каардынаты x', y' па формулах: $x=2x'-y'+3$, $y=x'+2y'+1$. Вызначце: 1) каардынаты пункта 0, а таксама каардынаты вектараў $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ адносна рэпера R'.

1. A(1, 1), B(3, 2). 2. A(2, 3), B(-1, -1). 3. A(-2, -1), B(1, 2).
4. A(2, -2), B(1, 3). 5. A(2, 1), B(0, 1).

Задача 7.

1. ABCD – паралелаграм. $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, дзе 0=A, $\vec{e}_1=\overline{AB}$, $\vec{e}_2=\overline{AD}$, $R'=\{0',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, дзе $0'=C$, $\vec{e}_1'=\overline{CB}$, $\vec{e}_2'=\overline{CD}$, - два рэперы, R – стары і R' - новы. Напішыце формулы пераўтварэння каардынат, якія выражаюць старыя каардынаты x, y адвольнага пункта праз яго новыя каардынаты x', y'.

Адк.: $x=-y'+1$, $y=-x'+1$.

2. ABC – трохвугольнік. $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, дзе 0 супадае з A, $\vec{e}_1=\overline{AB}$, $\vec{e}_2=\overline{AC}$, $R'=\{0',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, дзе $0'=C$, $\vec{e}_1'=\overline{CA}$, $\vec{e}_2'=\overline{CB}$ - два рэперы. Напішыце формулы пераўтварэння каардынат. Адк.: $x=-y'$, $y=-x'-y'+1$.

3. У трохвугольніку OAB праведзены медыяны AD і BE, $0'$ - пункт іх перасячэння. $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, дзе $\vec{e}_1=\overline{OA}$, $\vec{e}_2=\overline{OB}$, - стары рэпер, а $R'=\{0',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, дзе $\vec{e}_1'=\overline{0'A}$, $\vec{e}_2'=\overline{0'B}$ - новы рэпер. Напішыце формулы пераўтварэння каардынат. Адк.: $x=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}$.

4. ABCD – трапецыя, BC‖AD, AD=2BC. 0 – пункт перасячэння працягу бакавых старон, $0'$ - пункт перасячэння дыяганалей. $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, дзе $\vec{e}_1=\overline{OB}$, $\vec{e}_2=\overline{OC}$, - стары рэпер, а $R'=\{0',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, дзе $\vec{e}_1'=\overline{0'B}$, $\vec{e}_2'=\overline{0'C}$ - новы рэпер. Напішыце формулы пераўтварэння каардынат.

Адк.: $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}$.

5. OACB – паралелаграм, K і L – сярэдзіны старон AC і BC адпаведна. $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, дзе $\vec{e}_1 = \overline{OA}$, $\vec{e}_2 = \overline{OB}$, - стары рэпер, а $R' = \{0', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, дзе $\vec{e}'_1 = \overline{OK}$, $\vec{e}'_2 = \overline{OL}$ - новы рэпер. Напішыце формулы пераўтварэння каардынат.

Адк.: $x = x' + \frac{1}{2}y'$, $y = \frac{1}{2}x' + y'$.

Задача 8.

Дадзены ортаўнармаваныя рэперы R і R′. Пачатак новага рэпера знаходзіцца ў пункце $O'(x_0, y_0)$, вугал ад дадатнага напрамку восі Ox да дадатнага напрамку восі $O'x'$ роўны $\frac{\pi}{3}$. Напішыце формулы пераўтварэння каардынат пры ўмове: 1) рэперы маюць аднолькавую арыентацыю, 2) рэперы маюць процілеглую арыентацыю.

1. $O'(2, -3)$. 2. $O'(3, 4)$. 3. $O'(3, -5)$. 4. $O'(-2, -3)$. 5. $O'(4, 3)$.

Задача 9.

Новы ортаўнармаваны рэпер атрыманы са старога пераносам пачатку ў пункт $O'(x_0, y_0)$ і паваротам на вугал φ такі, што $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = -\frac{4}{5}$. Дадзены каардынаты пунктаў A, B, C у новым рэперы. Знайдзіце каардынаты гэтых пунктаў у старым рэперы.

1. $O'(5, -1)$, $A(3, 2)$, $B(4, 3)$, $C(1, 1)$. Адк.: $A(\frac{42}{5}, -\frac{11}{5})$.

2. $O'(1, -3)$, $A(1, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(2, 1)$. Адк.: $A(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5})$.

3. $O'(3, -4)$, $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(5, -1)$. Адк.: $A(\frac{22}{5}, -\frac{21}{5})$.

4. $O'(-2, 3)$, $A(5, 1)$, $B(-4, 1)$, $C(2, 2)$. Адк.: $A(\frac{9}{5}, \frac{2}{5})$.

5. $O'(-3, 4)$, $A(3, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-3, 4)$. Адк.: $A(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5})$.

Задача 10.

Напішыце формулы пераўтварэння ортаўнармаваных рэпераў у кожным з наступных выпадкаў.

1. $\vec{i}' = \frac{\sqrt{2}}{10}\vec{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\vec{j}$, $O'(-3, \sqrt{2})$; рэперы маюць аднолькавую арыентацыю.

Адк.: $x = \frac{\sqrt{2}}{10}x' - \frac{7\sqrt{2}}{10}y' - 3$, $y = \frac{7\sqrt{2}}{10}x' + \frac{\sqrt{2}}{10}y' + \sqrt{2}$.

2. $\angle(\vec{i}, \vec{i}') = \frac{\pi}{6}$, $O'(0, -2)$; рэперы маюць процілеглую арыентацыю.

Адк.: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$, $y = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2$.

3. $\angle(\vec{i}, \vec{i}') = \frac{\pi}{6}$, $O'(0, 0)$; рэперы маюць аднолькавую арыентацыю.

Адк.: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$, $y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$.

4. $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$, $O'(2, -12)$; рэперы арыентаваны па-рознаму.

Адк.: $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 2$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 12$.

5. $\angle(\vec{i}, \vec{i}') = \frac{\pi}{3}$, $O'(1, 2)$; рэперы маюць аднолькавую арыентацыю.

Адк.: $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 2$.

Задача 11.

ABCD - квадрат. $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, дзе O=A, $\vec{i} = \overline{AB}$, $\vec{j} = \overline{AD}$, - стары рэпер. Напішыце формулы пераўтварэння ортаўнармаваных рэпераў, калі рэпер R' задаецца наступнымі ўмовамі.

1. $AC=O'x'$, $BD=O'y'$. Адк.: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}$.
2. $CD=O'x'$, $CB=O'y'$. Адк.: $x = -x' + 1$, $y = -y' + 1$.
3. $AD=O'x'$, $DC=O'y'$. Адк.: $x = y'$, $y = x' + 1$.
4. $AC=O'x'$, $DB=O'y'$. Адк.: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}$.
5. $AC=O'x'$, $BD=O'y'$. Адк.: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}$.

Задача 12.

У рэперы $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ прамая ℓ мае раўнанне Ax+By+C=0. Напішыце раўнанне прамой ℓ у рэперы $R' = \{0', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ у наступных выпадках.

1. ℓ: x-2y+1=0, $O'(1, 0)$, $\vec{e}_1'\{1, -3\}$, $\vec{e}_2'\{4, 4\}$.
2. ℓ: x+y=0, $O'(1, 0)$, $\vec{e}_1'\{1, 3\}$, $\vec{e}_2'\{3, 2\}$.
3. ℓ: x+y+5=0, $O'(1, 2)$, $\vec{e}_1'\{1, 0\}$, $\vec{e}_2'\{1, 1\}$.
4. ℓ: x-y-5=0, $O'(0, 1)$, $\vec{e}_1'\{1, 2\}$, $\vec{e}_2'\{1, 1\}$.
5. ℓ: 2x-y+1=0, $O'(2, -1)$, $\vec{e}_1'\{1, 1\}$, $\vec{e}_2'\{0, 1\}$.

Задача 13.

Праверце, ці з'яўляецца артаганальнай кожная з паступных матрыц.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{4} \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 14.

Дадзены два ортаўнармаваныя рэперы з агульным пачаткам O. Вось Ox' другога рэпера праходзіць у першым актанце і ўтварае з восямі Ox і Oy вуглы, роўныя $\frac{\pi}{3}$; вось Oy' ляжыць у плоскасці Oxy і ўтварае з дадатным напрамкам восі Oy востры вугал; вось Oz' накіравана так, што абодва рэперы маюць аднолькавую арыентацыю. Выразіце каардынаты x, y, z адвольнага пункта адносна першага рэпера праз яго каардынаты x', y', z' у другім рэперы.

Адк.: $x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{2}z'$, $y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{2}z'$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$.

Задача 15.

Адносна ортаўнармаванага рэпера дадзены раўнанні каардынатных пласкасцей новага рэпера:

$x+2y+5z+1=0$ – плоскасць $O'y'z'$, $2x-y+2=0$ – плоскасць $O'x'z'$, $x+2y-z-3=0$ – плоскасць $O'x'y'$.

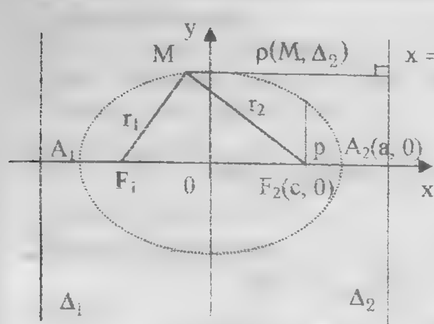
Пакажыце, што новы рэпер з'яўляецца ортаўнармаваным. Напішыце формулы, якія выражаюць новыя прамавугольныя каардынаты адвольнага пункта праз яго старыя каардынаты пры ўмове, што стары пачатак O мае ў новым рэперы дадатныя каардынаты.

Адк.: $x' = \frac{x + 2y + 5z + 1}{\sqrt{30}}$, $y' = \frac{2x - y + 2}{\sqrt{5}}$, $z' = \frac{-x - 2y + z + 3}{\sqrt{6}}$.

§ 5. Кананічныя раўнанні і прасцейшыя ўласцівасці эліпса, гіпербалы, парабалы

1. Кароткія тэарэтычныя звесткі

У параграфе 5 каардынаты пунктаў задаюцца ў ортаўнармаваным рэперы.



Рыс. 27.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a>b – кананічнае раўнанне эліпса (рыс.27);

$b^2=a^2-c^2$.

$F_1(-c, a)$, $F(c, a)$ – фокусы эліпса;

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ - эксцэнтрысітэт эліпса;

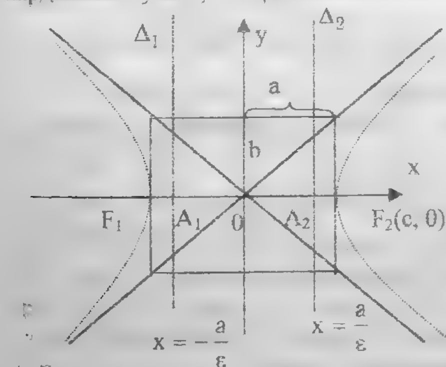
$r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$ - факальныя радыусы пункта $M(x, y)$, які ляжыць на эліпсе;

$p=\frac{b^2}{a}$ - факальны параметр; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - раўнанне дырэктрыс;

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ - раўнанне датычнай да эліпса ў пункце $M_0(x_0, y_0)$, які ляжыць на эліпсе;

$x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, $0\le\varphi<2\pi$ - параметрычныя раўнанні эліпса;

$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $0<\varepsilon<1$ – палярнае раўнанне эліпса, (ρ, φ) - палярныя каардынаты пункта, $-\pi<\varphi\le\pi$.



Рыс. 28.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - кананічнае раўнанне гіпербалы,

$b^2=c^2-a^2$;

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, c>a – фокусы гіпербалы (рыс. 28);

$y=\pm\frac{b}{a}x$ - раўнанні асімптот гіпербалы;

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, c>a, $\varepsilon>1$ - эксцэнтрысітэт;

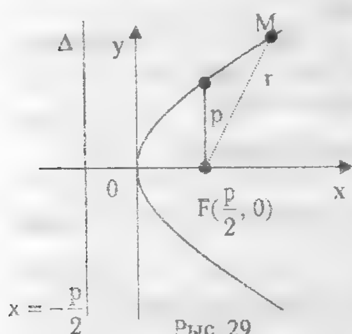
$r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$ - факальныя радыусы пункта, які ляжыць на правай галіне гіпербалы;

$r_1 = -(\varepsilon x + a)$, $r_2 = -(\varepsilon x - a)$ - факальныя радыусы пункта, які ляжыць на левай галіне гіпербалы;

$p = \dfrac{b^2}{a}$ - факальны параметр;

$x = \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$ - раўнанне дырэктрыс;

$\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ - раўнанне датычнай да гіпербалы ў пункце $M_0(x_0, y_0)$, які ляжыць на гіпербале;



Рыс. 29.

$y^2 = 2px$ - кананічнае раўнанне парабалы (рыс. 29);

$F(\frac{p}{2}, 0)$ - фокус парабалы;

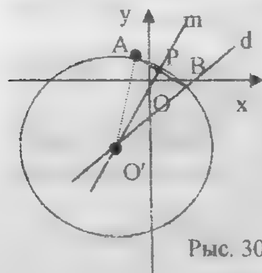
$x = -\dfrac{p}{2}$ - раўнанне дырэктрысы парабалы;

$y_0 y = p(x + x_0)$ - раўнанне датычнай да парабалы ў пункце $M_0(x_0, y_0)$, які ляжыць на парабале.

2. Прыклады рашэння задач

Задача 1^0.

Напішыце раўнанне акружнасці, якая праходзіць праз пункты A(-1, 3) і B(2,0), і цэнтр яе ляжыць на прамой d: 2x-3y-6=0.



Рыс. 30.

Рашэнне.

Каб запісаць раўнанне акружнасці $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, неабходна знайсці каардынаты x_0, y_0 яе цэнтра O' і радыус r. Цэнтр O' акружнасці роўнааддалены ад пункта A і B (рыс. 30), а таму ляжыць на восі сіметрыі m адрэзка AB. З другога боку, O' ляжыць на дадзенай прамой d. Значыць, пункт O' ёсць пункт перасячэння прамых d і m; $m \perp AB$ і праходзіць праз сярэдзіну P адрэзка AB.

1. Раўнанне прамой AB: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-3}$, ці x+y-2=0.

2. P – сярэдзіна AB, $P(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

3. Раўнанне прамой m.

Кіроўны вектар прамой AB $\vec{p}\{-1, 1\}$ з'яўляецца нармальным вектарам прамой m. Раўнанне прамой m можна запісаць у выглядзе –x+y+C=0. Прамая m праходзіць праз пункт P, таму C=-1. m: x-y+1=0.

4. Каардынаты пункта O': $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x-3y-6=0; \end{cases}$ $O'(-9, -8)$.

5. Даўжыня радыуса $r=O'A$: $O'A=\sqrt{(-9+1)^2+(-8-3)^2}=\sqrt{185}$.

6. Раўнанне шукаемай акружнасці: $(x+9)^2+(y+8)^2=185$.

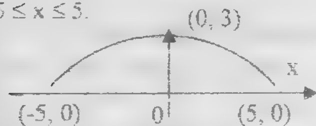
Адк.: $(x+9)^2+(y+8)^2=185$.

Задача 2^0.

Высветліце, якая фігура вызначана раўнаннем $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

Рашэнне.

Дадзеная залежнасць мае месца пры $25-x^2 \geq 0$ і $y \geq 0$, ці $-5 \leq x \leq 5$ і $y \geq 0$. Пераўтворым дадзенае раўнанне. Атрымаем: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, пры $y \geq 0$, $-5 \leq x \leq 5$.

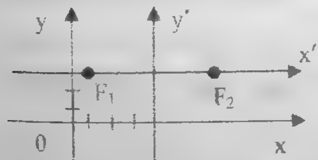


Рыс.31.

Раўнанне $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ задае паўэліпс (рыс. 31).

Задача 3^0.

Складзіце раўнанне эліпса, калі дадзены яго фокусы $F_1(1, 3)$, $F_2(7, 3)$ і раўнанне адной з яго дырэктрыс $x=\frac{37}{3}$.



Рыс. 32.

Рашэнне.

Цэнтр эліпса O' знаходзіцца ў сярэдзіне адрэзка F_1F_2 і мае каардынаты (4, 3). Разгледзім новы рэпер $R'=\{O', \vec{i}, \vec{j}\}$ з пачаткам у пункце O' і восямі $O'x'$ і $O'y'$, паралельнымі восям Ox і Oy (рыс. 32).

Як вядома, формулы пераходу ад рэпера R да рэпера R' маюць выгляд $x = x' + 4$, $y = y' + 3$. У новым рэперы эліпс будзе мець раўнанне: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. У новым рэперы фокусы F_1 і F_2 будуць мець новыя каардынаты

(-3, 0) і (3, 0) адпаведна. Дырэктрыса будзе мець раўнанне $x' = \frac{25}{3}$. Паколькі $x' = \frac{a}{\varepsilon}$, ці $x' = \frac{a^2}{c}$, c=3, тады $a^2=25$. $b^2 = a^2 - c^2 = 16$. У новым рэперы эліпс мае раўнанне: $\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ - раўнанне эліпса ў старым рэперы.

Задача 4^0.

Знайдзіце ўмову, пры якой прамая Ax+By+C=0 з'яўляецца датычнай да эліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Рашэнне.

Запішам раўнанне датычнай да эліпса $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, ці $b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0$. З другога боку, раўнанне датычнай мае выгляд Ax+By+C=0. Тады $\frac{b^2 x_0}{A} = \frac{a^2 y_0}{B} = -\frac{a^2 b^2}{C}$. Адсюль знаходзім x_0 і y_0.

$x_0 = -\frac{a^2 A}{C}$, $y_0 = -\frac{b^2 B}{C}$.

Паколькі пункт дотыку ляжыць на прамой Ax+By+C=0, тады $-A\frac{a^2 A}{C} - D\frac{b^2 B}{C} + C = 0$, ці $A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$.

(Аналагічна знаходзім адпаведныя ўмовы для гіпербалы і парабалы. $A^2 a^2 - B^2 b^2 = C^2$, $pB^2 = 2AC$.)

Задача 5^0.

Складзіце раўнанні датычных да эліпса $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, паралельных прамой 2x-y=0.

Рашэнне.

Спосаб 1. Раўнанне датычнай да дадзенага эліпса ($\frac{x_0 x}{30} + \frac{y_0 y}{24} = 1$) запішам у наступным выглядзе: $4x_0 x + 5y_0 y - 120 = 0$, дзе $M_0(x_0, y_0)$ – пункт

дотыку. Датычная паралельная прамой 2x-y=0, значыць, $\frac{4x_0}{2}=\frac{5y_0}{-1}$ і $x_0=-\frac{5}{2}y_0$. M_0 прыналежыць эліпсу, таму $\frac{25y_0^2}{4\cdot 30}+\frac{y_0^2}{24}=1$. Адсюль: $y_0=\pm 2$. Тады $x_0=\mp 5$. Значэнні x_0 і y_0 падстаўляем у раўнанне датычнай. Маем $4(\mp 5)x+5(\pm 2)y-120=0$.

Адк.: $2x-y\pm 12=0$.

Спосаб 2. Раўнанне прамой, паралельнай прамой 2x-y=0, можна запісаць: 2x-y+C=0. На падставе задачы 4^0 маем $30\cdot 4+24\cdot 1=C^2$, адсюль $C=\pm 12$. Раўнанні датычных: $2x-y\pm 12=0$.

Задача 6^0.

Эліпс праходзіць праз пункт $P(3, \frac{12}{5})$ і датыкаецца прамой 4x+5y=25. Напішыце раўнанне гэтага эліпса і знайдзіце пункт, у якім ён датыкаецца дадзенай прамой. Восі каардынат супадаюць з восямі эліпса.

Рашэнне.

Раўнанне эліпса мае выгляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Трэба адшукаць a^2 і b^2.

Пункт $P(3, \frac{12}{5})$ ляжыць на эліпсе, таму

$\frac{9}{a^2}+\frac{144}{25b^2}-1$, ці $9\cdot 25b^2+144a^2-25a^2b^2=0$. (1)

На падставе задачы 4^0 маем

$16a^2+25b^2=625$. (2)

З сістэмы раўнанняў (1) і (2) знаходзім a^2 і b^2.

1) $a^2=\frac{225}{16}$, $b^2=16$.

2) $a^2=25$, $b^2=9$.

Атрымліваем два эліпсы 1) $\frac{16x^2}{225}+\frac{y^2}{16}=1$ і 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Застаецца адшукаць пункт дотыку прамой 4x+5y=25 да кожнага з эліпсаў. Раўнанне датычнай да эліпса - $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, ці $b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2=0$.

Апошняе раўнанне і раўнанне 4x+5y-25=0 задаюць адну прамую; таму адпаведныя каэфіцыенты прапарцыянальныя.

а) $16x_0x+\frac{225}{16}y_0y-225=0$, 4x+5y-25=0, $\frac{16x_0}{4}=\frac{225y_0}{16\cdot 5}=\frac{225}{25}$.

Адсюль $x_0 = \frac{9}{4}$, $y_0 = \frac{16}{5}$.

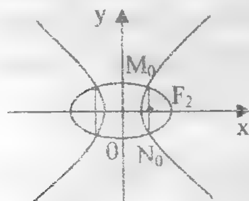
б) $9x_0x + 25y_0y = 9 \cdot 25$, 4x+5y=25, $\frac{9x_0}{4} = \frac{25y_0}{5} = 9$.

Адсюль $x_0 = 4$, $y_0 = \frac{9}{5}$.

Адк.: 1) $\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$, $M_0(\frac{9}{4}, \frac{16}{5})$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $M_0(4, \frac{9}{5})$.

Задача 7^0.

Напішыце раўнанне гіпербалы, якая мае з эліпсам $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ агульныя факальныя хорды.



Рыс. 33.

Рашэнне.

Фокусы эліпса маюць каардынаты $F_1(-\sqrt{12}, 0)$ $F_2(\sqrt{12}, 0)$ (рыс. 33). $F_2M_0 = p = \frac{b^2}{a} = 1$, p – факальны параметр, пункт M_0 мае каардынаты $(\sqrt{12}, \frac{b^2}{a})$, ці $M_0(\sqrt{12}, 1)$.

Для гіпербалы: $b^2 = c^2 - a^2$, ці $b^2 = 12 - a^2$. Пункт M_0 ляжыць на гіпербалe; значыць, $\frac{12}{a^2} - \frac{1}{12 - a^2} = 1$. Адсюль: 1) $a^2=16$ і 2) $a^2=9$.

1. Калі $a^2=16$, тады $b^2=-4$, чаго быць не можа.
2. Калі $a^2=9$, тады $b^2=3$.

Раўнанне гіпербалы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Задача 8^0.

Да гіпербалы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ правядзіце датычную, перпендыкулярную прамой x+y=0.

Рашэнне.

На падставе задачы датычная павінна быць перпендыкулярная прамой x+y=0, а значыць, паралельная прамой x-y=0.

Спосаб 1. Запішам раўнанне датычнай да дадзенай гіпербалы $\frac{x_0x}{16} - \frac{y_0y}{9} = 1$, ці $9x_0x - 16y_0y = 9 \cdot 16$. Датычная паралельная прамой x-

y=0, то $\frac{9x_0}{1} = \frac{-16y_0}{-1}$, ці $x_0 = \frac{16y_0}{9}$. Значэнне x_0 падставім у раўнанне гіпербалы, паколькі пункт $M_0(x_0, y_0)$ ляжыць на гіпербале: $\frac{16^2 y_0^2}{81 \cdot 16} - \frac{y_0^2}{9} = 1$

Адсюль $y_0 = \pm \frac{9}{\sqrt{7}}$. Тады $x_0 = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$. Значэнні x_0, y_0 падстаўляем у раўнанне датычнай да гіпербалы:

$$\pm \frac{9 \cdot 16}{\sqrt{7}} x \mp \frac{9 \cdot 16}{\sqrt{7}} y - 9 \cdot 16 = 0, \text{ ці } \pm \frac{x}{\sqrt{7}} \mp \frac{y}{\sqrt{7}} - 1 = 0.$$

Адк.: $x - y \mp \sqrt{7} = 0$.

Спосаб 2. Датычная паралельная прамая x-y=0, таму яе раўнанне можна запісаць: x-y+C=0. На падставе задачы 4^0 для гіпербалы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і датычнай Ax+By+C=0 мае месца $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$; бо A=1, B=-1, a^2=16, b^2=9, то 16-9=C^2, C=$\pm\sqrt{7}$.

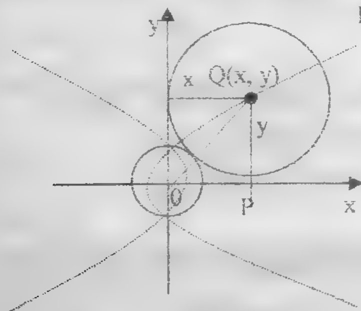
Адк.: $x - y \pm \sqrt{7} = 0$.

Задача 9^0.

Знайдзіце раўнанне фігуры, пункты якой з'яўляюцца цэнтрамі акружнасцей, што датыкаюцца восі ардынат і акружнасці $x^2 + y^2 = 1$.

Рашэнне.

Акружнасць з цэнтрам Q(x, y) датыкаецца восі Oy і акружнасці $x^2 + y^2 = 1$ (рыс. 34.). Тады OP=x, PQ=y, OQ=1+x. Трохвугольнік OQP – прамавугольны: $y^2 = (x+1)^2 - x^2$ ці y^2=2x+1. Гэтае раўнанне задае парабалу, вяршыня якой знаходзіцца ў пункце $O'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.



Рыс. 34.

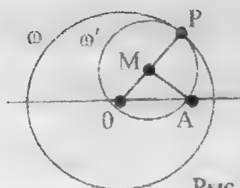
Існуе і другая парабала, сіметрычная парабале y^2=2x+1 адносна восі ардынат, яе раўнанне y^2=-2x+1.

Умове задачы здавальняюць дзве парабалы: y^2=±2x+1.

Задача 10^0.

Дакажыце, што мноства цэнтраў акружнасцей, якія праходзяць праз пункт A і датыкаюцца ўнутраным вобразам дадзенай акружнасці, ёсць эліпс.

Рашэнне.



Рыс. 35.

Няхай ω - дадзеная акружнасць з цэнтрам O і радыусам R, A – дадзены пункт. Паводле ўмовы задачы OA<R (рыс. 35). Няхай ω′ - акружнасць, якая праходзіць праз пункт A і датыкаецца акружнасці ω унутраным вобразам, M – яе цэнтр.

Трэба адшукаць фігуру, якой належыць пункт M. Пункты O, M, P, дзе P – пункт дотыку акружнасцей ω і ω′, ляжаць на адной прамой. MP=MA – радыусы акружнасці ω′. Тады: OM+MA=OM+MP=R. Сума адлегласцей пункта M ад дадзеных пунктаў O і A ёсць нязменная велічыня. Як вядома, такому патрабаванню здавальняе эліпс; фокусамі эліпса будуць дадзеныя пункты O і A, большая (факальная) вось гэтага эліпса роўная радыусу R дадзенай акружнасці.

3. Задачы для самастойнага рашэння

Акружнасць

Задача 1.

Напішыце ў кожным выпадку раўнанне акружнасці, якая праходзіць праз пункт A і мае цэнтр у пункце Q.

1. Q(2, -1), A(2, 8).
2. Q(3, -6), A(5, -4).
3. Q(2, 1), A(4, 1).
4. Q(-3, 2), A(1, -2).
5. Q(1, -3), A(5, -3).

Задача 2.

Напішыце раўнанне акружнасці, якая праходзіць праз пункты A і B і цэнтр яе ляжыць на прамой d.

1. A(1, 4), B(-3, 2), d: x+y-1=0.
2. A(2, 3), B(5, 2), d: y=0.
3. A(3, 0), B(-1, 2), d: x-y+2=0.
4. A(-1, 2), B(1, 4), d=Oy.
5. A(1, 2), B(5, 4), d=Ox.

Задача 3.

Напішыце раўнанне акружнасці, якая праходзіць праз тры пункты A, B, C.

1. A(1, -2), B(0, 5), C(-6, 5).
2. A(3, 1), B(7, 1), C(5, 3).
3. A(3, 1), B(1, -3), C(5, -1).
4. A(0, 0), B(4, 6), C(2, 4).
5. A(3, -2), B(0, $-2+\sqrt{3}$), C(1, 0).

Адк.: 1. $(x+3)^2+(y-1)^2=25$. 2. $(x-5)^2+(y-1)^2=4$. 3. $(x-\frac{8}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=\frac{50}{9}$. 4. $(x-11)^2+(y+3)^2=130$. 5. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

Задача 4.

Пакажыце, што наступныя раўнанні задаюць акружнасці. Вызначце цэнтр і радыус кожнай акружнасці. Выберыце ортаўнармаваны рэпер і зрабіце рысунак.

1. $2x^2+2y^2+4x-20y-3=0$.
2. $3x^2+3y^2-4x-6y-13=0$.
3. $2x^2+2y^2-4x+4y-11=0$.
4. $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$.
5. $3x^2+3y^2+6x-18y+50=0$.

Эліпс

Задача 5.

Вызначце паўвосі, каардынаты фокусаў, эксцэнтрысітэт, раўнанні дырэктрыс эліпса. Знайдзіце факальныя радыусы пунктаў перасячэння эліпса з восямі каардынат.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. 2. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. 3. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$. 4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.
5. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

Задача 6.

Складзіце ў кожным выпадку кананічнае раўнанне эліпса, калі дадзены большая паўвось a і эксцэнтрысітэт ε. Знайдзіце факальны радыус r_2 і каардынаты адпаведнага пункта M, калі дадзены факальны радыус r_1 гэтага пункта.

1. $a=6$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $r_1=7$.
2. $a=13$, $\varepsilon=\frac{5}{13}$, $r_1=12$.
3. $a=15$, $\varepsilon=\frac{3}{5}$, $r_1=10$.
4. $a=5$, $\varepsilon=0.8$, $r_1=4$.
5. $a=12$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $r_1=16$.

Задача 7.

Восямі эліпса з'яўляюцца восі каардынат. Адлегласць паміж фокусамі роўная 2c, а адлегласць паміж дырэктрысамі роўная 2d. Знайдзіце даўжыні паўвосей эліпса.

1. $2c=4$, $2d=20$. 2. $2c=10$, $2d=30$. 3. $2c=2$, $2d=10$. 4. $2c=8$, $2d=12$. 5. $2c=6$. $2d=8$.

Задача 8.

Восямі эліпса з'яўляюцца восі каардынат. Знайдзіце даўжыні восей эліпса, калі дадзены яго эксцэнтрысітэт ε і адлегласць d ад фокуса да адпаведнай дырэктрысы.

1. $\varepsilon=0{,}8$, $d=\frac{9}{4}$. 2. $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $d=9$. 3. $\varepsilon=\frac{2}{3}$, $d=15$. 4. $\varepsilon=\frac{1}{3}$, $d=8$. 5. $\varepsilon=\frac{3}{5}$, $d=16$.

Задача 9.

Складзіце раўнанне эліпса, для якога дадзены эксцэнтрысітэт ε і адлегласць паміж дырэктрысамі 2d.

1. $\varepsilon=\frac{3}{4}$, $2d=\frac{32}{3}$. 2. $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2d=8\sqrt{\frac{10}{3}}$. 3. $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $2d=\frac{9\sqrt{10}}{2}$.
4. $\varepsilon=\frac{4}{5}$, $2d=\frac{25}{2}$. 5. $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $2d=18$.

Задача 10.

Напішыце раўнанне эліпса, восі якога паралельныя восям каардынат, эліпс датыкаецца восей Ox і Oy адпаведна ў пунктах K(m, 0) і L(0, n). Знайдзіце цэнтр і паўвосі эліпса.

1. K(5, 0), L(0, 3). 2. K(2,5; 0), L(0, 1). 3. K(7, 0), L(0; 2,5). 4. K(2, 0), L(0, 4).

5. K(6, 0), L(0; 3,5).

Задача 11.

Пакажыце, што прыведзеныя ніжэй раўнанні вызначаюць эліпсы. Знайдзіце ў кожным выпадку каардынаты цэнтра, паўвосі і эксцэнтрысітэт. Зрабіце рысунак у выбраным рэперы.

1. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.
2. $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$.
3. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.
4. $9x^2+16y^2-18x+96y+9=0$.
5. $12x^2+4y^2+72x-16y+76=0$.

Задача 12.

Высветліце, якія фігуры вызначаны ніжэй прыведзенымі раўнаннямі. Нарысуйце ў кожным выпадку гэтую фігуру ў выбраным рэперы.

1. $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.
2. $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$.
3. $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.
4. $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$
5. $x=\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$.

Задача 13.

Напішыце ў кожным выпадку раўнанне эліпса, які перасякае вось Ox у пунктах M(m, 0) і N(n, 0), датыкаецца восі Oy у пункце P(0, p), пры ўмове, што восі эліпса паралельныя восям каардынат.

1. M(1, 0), N(9, 0), P(0, 3).
2. M(3, 0), N(7, 0), P(0, 2).
3. M(2, 0), N(8, 0), P(0, 2).
4. M(1, 0), N(11, 0), P(0, 3).
5. M(-1, 0), N(-7, 0), P(0, 2).

Задача 14.

Вяршыня трохвугольніка ABC, які мае нерухомую аснову AB, перамяшчаецца так, што перыметр трохвугольніка застаецца нязменным і роўным 2p. Знайдзіце раўнанне траекторыі вяршыні C, калі дадзены перыметр 2p і аснова AB=2c.

1. 2p=40, 2c=10. Адк.: $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{200}=1$.
2. 2p=50, 2c=24. Адк.: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.
3. 2p=30, 2c=14. Адк.: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{15}=1$.
4. 2p=46, 2c=10. Адк.: $\frac{x^2}{324}+\frac{y^2}{299}=1$.
5. 2p=28, 2c=12. Адк.: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$.

Задача 15.

Складзіце раўнанне эліпса, калі зададзены яго фокусы $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ і раўнанне адной з яго дырэктрыс.

1. $F_1(-2, 2)$, $F_2(6, 2)$, $x=9$. Адк.: $\frac{(x-2)^2}{28}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$.
2. $F_1(1, -1)$, $F_2(-7, -1)$, $x=\frac{13}{4}$. Адк.: $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$.
3. $F_1(-1, 2)$, $F_2(5, 2)$, $x=\frac{31}{3}$. Адк.: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$.
4. $F_1(-5, 2)$, $F_2(1, 2)$, $x=\frac{10}{3}$. Адк.: $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{7}=1$.
5. $F_1(-4, -2)$, $F_2(10, -2)$, $x=\frac{85}{7}$. Адк.: $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{15}=1$.

Задача 16.

У кожным з ніжэй прыведзеных выпадкаў напішыце раўнанне датычнай да эліпса ў пункце M_0.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{18}=1$, $M_0(\frac{5}{\sqrt{2}}, 3)$.
2. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, $M_0(\sqrt{3}, \frac{6\sqrt{5}}{5})$.
3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $M_0(1, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$.
4. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$, $M_0(12, \frac{25}{13})$.
5. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, $M_0(5, -2)$.

Задача 17.

У кожным з прыведзеных ніжэй выпадкаў напішыце раўнанні датычных да эліпса, праведзеных з пункта P.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $P(10, 4)$. Адк.: $y=4$, $16x-15y-100=0$.
2. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, $P(-6, 3)$. Адк.: $y=3$, $12x+7y+51=0$.
3. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, $P(\frac{10}{3}, \frac{5}{3})$. Адк.: $x-y-5=4$, $x-4y-10=0$.
4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $P(5, 8)$. Адк.: $x=5$, $3x-5y+25=0$.
5. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $P(-2, 4)$. Адк.: $x=-2$, $13x+16y-38=0$.

Задача 18.

Складзіце раўнанні датычных да эліпса γ, паралельных дадзенай прамой d.

1. $\gamma: \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5/2}=1$, d: $3x+2y+7=0$. Адк.: $3x+2y\mp 10=0$.

2. $\gamma: \frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, d: $4x-2y+23=0$. Адк.: $2x-y\pm 12=0$.

3. $\gamma: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, d: $x+y-1=0$. Адк.: $x+y\pm 5=0$.

4. $\gamma: \frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, d: $2x-y+17=0$. Адк.: $2x-y\pm 12=0$.

5. $\gamma: \frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$, d: $4x-5y-20=0$. Адк.: $4x-5y\pm 40=0$.

Задача 19.

Знайдзіце эксцэнтрысітэт эліпса, для якога адлегласць паміж фокусамі роўная адлегласці паміж канцамі большай і малай восей. Адк.: $\varepsilon^2=0{,}4$.

Задача 20.

Вызначце паўвосі эліпса праз эксцэнтрысітэт ε і параметр p.

Адк.: $a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}$, $b=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

Гіпербала

Задача 21.

Вызначце паўвосі, каардынаты фокусаў, эксцэнтрысітэт, раўнанні дырэктрыс гіпербалы γ.

1. $\gamma: \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 2. $\gamma: \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. 3. $\gamma: \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

4. $\gamma: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 5. $\gamma: \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

Задача 22.

Складзіце кананічнае раўнанне гіпербалы, калі дадзены раўнанні асімптот гіпербалы і каардынаты пункта M, які ляжыць на гіпербале.

1. $y=\pm\frac{5}{12}x$, M(24, 5). Адк.: $\frac{x^2}{432}-\frac{y^2}{75}=1$.

2. $y=\pm\frac{12}{5}x$, M(7, $\frac{24\sqrt{6}}{5}$). Адк.: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$.

3. $y=\pm\frac{1}{2}x$, M(12, $3\sqrt{3}$). Адк.: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

4. $y=\pm\frac{3}{4}x$, M(12, $3\sqrt{5}$). Адк.: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

5. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}x$, M(9, -4). Адк.: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$.

Задача 23.

Складзіце кананічнае раўнанне гіпербалы, калі зададзена адлегласць d паміж дырэктрысамі і эксцэнтрысітэт ε.

1. $d=\frac{32}{5}$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$. Адк.: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.
2. $d=\frac{18}{5}$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$. Адк.: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.
3. $d=\frac{50}{13}$, $\varepsilon=\frac{13}{5}$. Адк.: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$.
4. $d=\frac{50}{7}$, $\varepsilon=\frac{7}{5}$. Адк.: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.
5. $d=\frac{32}{5}$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$. Адк.: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Задача 24.

Напішыце кананічнае раўнанне гіпербалы (эліпса), якая (які) мае з гіпербалай (эліпсам) агульныя факальныя хорды.

1. γ: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Адк.: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.
2. γ: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$. Адк.: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$.
3. γ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Адк.: $\frac{x^2}{\frac{25}{9}}-\frac{y^2}{\frac{20}{9}}=1$.
4. γ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Адк.: $\frac{x^2}{\frac{81}{25}}-\frac{y^2}{\frac{144}{25}}=1$.
5. γ: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$. Адк.: $\frac{3x^2}{49}+\frac{3y^2}{28}=1$.

Задача 25.

Знайдзіце эксцэнтрысітэт гіпербалы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, пры дадзеных умовах.

1. Вугал паміж асімптотамі роўны 60°. Адк.: $\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. Вугал паміж асімптотамі роўны 90°. Адк.: $\varepsilon=\sqrt{2}$.
3. Сапраўдную вось гіпербалы відаць з фокуса спалучанай ёй гіпербалы пад вуглом 60°. Адк.: $\varepsilon=\sqrt{3}$.
4. Дырэктрысы гіпербалы дзеляць адлегласць паміж фокусамі на тры роўныя часткі. Адк: $\varepsilon=\sqrt{3}$.
5. Вугал паміж асімптотамі роўны φ. Адк.: $\varepsilon^2=\frac{2}{1-\cos\varphi}$.

Задача 26.

Пакажыце, што прыведзеныя ніжэй раўнанні вызначаюць гіпербалы.

Знайдзіце ў кожным выпадку каардынаты цэнтра, паўвосі, эксцэнтрысітэт. Зрабіце рысунак у выбраным рэперы.

1. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.
2. $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.
3. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.
4. $3x^2-y^2+12x-4y-4=0$.
5. $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$.

Задача 27.

Высветліце, якія лініі вызначаюць наступныя раўнанні. Зрабіце рысунак лініі ў выбраным рэпэры.

1. $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$.
2. $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$.
3. $y=9-2\sqrt{x^2+4x+8}$.
4. $y=5-\frac{3}{4}\sqrt{x^2+4x-12}$.
5. $y=-1-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$.

Задача 28.

У кожным выпадку напішыце раўнанне датычнай да гіпербалы ў дадзеным на ёй пункце M.

1. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, M(5, -4).
2. $x^2-y^2=8$, M(3, -1).
3. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$, M(5, 3).
4. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$, M(-5, -3).
5. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, M(-5, 4).

Задача 29.

У кожным выпадку напішыце раўнанне датычных да гіпербалы, праведзеных з пункта P.

1. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, P(1, 4).
2. $x^2-y^2=16$, P(-1, -7).
3. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$, P(1, 0).
4. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$, P(0, -1).
5. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$, P(0, -1).

Задача 30.

Знайдзіце ўмову, пры якой прамая Ax+By+C=0 з'яўляецца датычнай да гіпербалы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Адк.: $A^2a^2-B^2b^2=C^2,\ C\neq 0$.

Задача 31.

Да гіпербалы $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ правядзіце датычную:

1) паралельную прамой 2x+y-3=0. Адк.: $2x+y\pm 3\sqrt{6}=0$.

2) паралельную прамой x+y-7=0. Адк.: $x+y\pm 3=0$.
3) перпендыкулярную прамой x-2y=0. Адк.: $2x+y\pm\sqrt{54}=0$.
4) перпендыкулярную прамой 2x-4y+3=0. Адк.: $2x+y\pm 3\sqrt{6}=0$.
5) перпендыкулярную прамой 2x+y=0. Адк.: датычных у гэтым кірунку не існуе.

Задача 32.

γ - эліпс. Складзіце раўнанне гіпербалы, вяршыні якой знаходзяцца ў фокусах, а фокусы – у вяршынях дадзенага эліпса.

1. $\gamma: 5x^2+8y^2=40$. Адк.: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

2. $\gamma: 9x^2+25y^2=225$. Адк.: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

3. $\gamma: 16x^2+25y^2=400$. Адк.: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

4. $\gamma: x^2+4y^2=20$. Адк.: $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{5}=1$.

5. $\gamma: x^2+4y^2=4$. Адк.: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$.

Парабала

Задача 33.

Напішыце раўнанне парабалы ў кожным з наступных выпадкаў.

1. Вось абсцыс з'яўляецца воссю парабалы, парабала праходзіць праз пачатак каардынат і пункт M(1, 4).
2. Воссю сіметрыі з'яўляецца вось ардынат, фокус знаходзіцца ў пункце F(0, 2), вяршыня супадае з пачаткам каардынат.
3. Адлегласць ад фокуса да вяршыні парабалы роўная 3.
4. Прамая x=0 – вось сіметрыі парабалы. Фокус парабалы знаходзіцца ў пункце (0, -5), а вяршыня – у пункце (0, 0).
5. Воссю сіметрыі парабалы з'яўляецца вось абсцыс. Фокус знаходзіцца ў пункце (-6, 0), а вяршыня – у пункце (0, 0).

Задача 34.

Дакажыце, што кожнае з наступных раўнанняў задае парабалу. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы, велічыню параметра p і раўнанне дырэктрысы. Выберыце рэпер, зрабіце рысунак.

1. $y^2=4x-8$, $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$.
2. $y^2=-6x+4$, $y=4x^2-8x+7$.
3. $x^2=6y+2$, $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$.
4. $x^2=-y+2$, $x=2y^2-12y+14$.
5. $y^2=5x-15$, $x=-y^2+2y-1$.

Задача 35.

Напішыце кананічнае раўнанне парабалы, калі дадзены каардынаты яе фокуса F і раўнанне дырэктрысы.

1. F(0, 3), $x=-1$. 2. F(5, 0), $x=0$. 3. F(0, -5), $y=1$. 4. F(0, 0), $y=-4$. 5. F(-5, 0), $x=1$.

Задача 36.

Складзіце раўнанне парабалы, вяршыня А якой мае каардынаты (a, b), параметр, роўны p, і кірунак восі сіметрыі супадае з дадзеным кірункам.

1. A(3, 2), $p=2$, - з дадатным кірункам восі абсцыс. Адк.: $(y-2)^2=4(x-3)$.
2. A(-2, 3), $p=3$, - з дадатным кірункам восі ардынат. Адк.: $(x+2)^2=6(y-3)$.
3. A(-1, -1), $p=1$, - з адмоўным кірункам восі абсцыс. Адк.: $(y+1)^2=-2(x+1)$.
4. A(3, -1), $p=4$, - з адмоўным кірункам восі ардынат. Адк.: $(x-3)^2=-8(y-1)$.
5. A(-1, 2), $p=3$, - з дадатным кірункам восі абсцыс. Адк.: $(y-2)^2=6(x-1)$.

Задача 37.

У кожным выпадку знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы, велічыню параметра, раўнанне дырэктрысы. Зрабіце рысунак парабалы.

1. $y^2-6x+14y+49=0$. Адк.: A(0, -7), $p=3$, $x=-\frac{3}{2}$.
2. $y^2-10x-2y-19=0$. Адк.: A(-2, 1), $p=5$, $x=-\frac{9}{2}$.
3. $y=x^2+6x$. Адк.: A(-3, -9), $p=\frac{1}{2}$, $y=\ \frac{13}{4}$.
4. $x^2+2x-4y-3=0$. Адк.: A(-1, -1), $p=2$, $y=-2$.
5. $x^2-6x-4y+29=0$. Адк.: A(3, 5), $p=2$, $y=4$.

Задача 38.

Напішыце раўнанне парабалы, вяршыня якой знаходзіцца ў пункце $O'(2, -1)$, калі парабала сіметрычная адносна прамой d і праходзіць праз пункт A.

1. d: $x=2$, A(0, 0). Адк.: $(x-2)^2=4(y+1)$.
2. d: $y=-1$, A(-1, 0). Адк.: $(y+1)^2=-\frac{1}{3}(x-2)$.
3. d: $y+1=0$, A(4, 1). Адк.: $(y+1)^2=2(x-2)$.
4. d: $x-2=0$, A(0, -4). Адк.: $(x-2)^2=-\frac{4}{3}(y+1)$.
5. d: $y=-1$, A(4, -3). Адк.: $(y+1)^2=2(x-2)$.

Задача 39.

AB – аснова трохвугольніка ABC, вяршыня C якога перамяшчаецца па прамой $y=h$ ($h>0$). Знайдзіце лінію, якую апісвае ортацэнтр H (пункт перасячэння вышынь) трохвугольніка ў наступных выпадках.

1. A(-6, 0), B(6, 0), $h=4$.
2. A(-3, 0), B(3, 0), $h=3$.
3. A(-2, 0), B(2, 0), $h=6$.
4. A(-5, 0), B(5, 0), $h=4$.
5. A(-4, 0), B(4, 0), $h=6$.

Адк.: пункт H апісвае парабалу.

Задача 40.

Знайдзіце фігуру, пункты якой з'яўляюцца цэнтрамі кругоў, што датыкаюцца восі ардынат і дадзенага круга.

1. $x^2+y^2=4$. 2. $x^2+y^2=8$. 3. $x^2+y^2=5$. 4. $x^2+y^2=9$. 5. $x^2+y^2=3$.

Задача 41.

Напішыце раўнанне хорды парабалы $y^2=2px$, якая праходзіць праз пункт A і ў гэтым пункце дзеліцца папалам.

1. $A(2, 1)$, $y^2=4x$. Адк.: $2x-y-3=0$.
2. $A(5, 3)$, $y^2=6x$. Адк.: $x-y-2=0$.
3. $A(-2, 1)$, $y^2=-4x$. Адк.: $2x+y+3=0$.
4. $A(3, 2)$, $y^2=6x$. Адк.: $3x-2y-5=0$.
5. $A(-3, 2)$, $y^2=-6x$. Адк.: $3x+2y+5=0$.

Задача 42.

Дадзена раўнанне парабалы. Знайдзіце ў кожным выпадку раўнанне фігуры, пункты якой з'яўляюцца сярэдзінамі хорд гэтай парабалы, якія паралельныя прамой d.

1. $y^2=4x$, d: $3x-2y+5=0$. Адк.: $y=\frac{4}{3}$ - прамая, паралельная восі Ox.
2. $x^2=6y$, d: $x+y=0$. Адк.: $x=-3$ – прамая, паралельная восі Oy.
3. $y^2=-8x$, d: $x-y=0$. Адк.: $y=-4$ – прамая, паралельная восі Ox.
4. $x^2=-6y$, d: $x+y-1=0$. Адк.: $x=3$ – прамая, паралельная восі Oy.
5. $y^2=3x$, d: $x=-y$. Адк.: $y=-\frac{3}{2}$ - прамая, паралельная восі Ox.

Задача 43.

Знайдзіце ўмову, пры якой прамая $Ax+By+C=0$ з'яўляецца датычнай да парабалы $y^2=2px$.

Адк.: $pB^2=2AC$.

Задача 44.

Складзіце раўнанне датычнай да парабалы γ, перпендыкулярнай прамой d.

1. $\gamma: y^2=4x$, d: $x-y+2=0$. Адк.: $x+y+1=0$.
2. $\gamma: y^2=10x$, d: $y-3=0$. Адк.: $x=0$.
3. $\gamma: y^2=8x$, d: $x+y-1=0$. Адк.: $x-y+2=0$.
4. $\gamma: y^2=10x$, d: $2x+y-4=0$. Адк.: $x-2y+10=0$.
5. $\gamma: y^2=6x$, d: $2x+3y-1=0$. Адк.: $3x-2y+2=0$.

Задача 45.

Запішыце адносна ортаўнармаванага рэпера кананічныя раўнанні крывых другога парадку, якія зададзены сваімі раўнаннямі ў палярнай сістэме каардынат.

1. а) $\rho=1$; б) $\rho=\dfrac{2}{1-2\cos\varphi}$; в) $\rho=\dfrac{25}{13-12\cos\varphi}$.
2. а) $\rho=2$; б) $\rho=\dfrac{3}{2-\cos\varphi}$; в) $\rho=\dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$.

3. а) $\rho=1,5$; б) $\rho = \dfrac{2}{3-\cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$.

4. а) $\rho=0,5$; б) $\rho = \dfrac{4}{2-2\cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{4}{\sqrt{5}-\cos\varphi}$.

5. а) $\rho=2,5$; б) $\rho = \dfrac{2}{3-3\cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{25}{12-13\cos\varphi}$.

Задача 46.

Дакажыце, што мноства цэнтраў акружнасцей, якія праходзяць праз пункт А і датыкаюцца ўнутраным вобразам дадзенай акружнасці, ёсць эліпс. Знайдзіце раўнанне гэтага эліпса, калі дадзеная акружнасць мае раўнанне $x^2+y^2=25$, пункт А мае зададзеныя каардынаты.

1. A(3, 0). 2. A(2, 0). 3. A(-3, 0). 4. A(-2, 0). 5. A(4, 0).

Задача 47.

Дакажыце, што мноства цэнтраў акружнасцей, якія праходзяць праз дадзены пункт А і датыкаюцца звонку дадзенай акружнасці, ёсць гіпербала. Адк.: цэнтр дадзенай акружнасці і дадзены пункт з'яўляюцца фокусамі гіпербалы. Радыус акружнасці роўны даўжыні сапраўднай восі гіпербалы. Сладзіце раўнанне гэтай гіпербалы, калі дадзеная акружнасць мае раўнанне $x^2+y^2=9$, пункт А мае дадзеныя каардынаты.

1. A(5, 0). 2. A(-5, 0). 3. A(4, 0). 4. A(6, 0). 5. A(-6, 0).

Задача 48.

Знайдзіце мноства цэнтраў акружнасцей, якія праходзяць праз пункт А і датыкаюцца прамой а; пункт А не ляжыць на прамой а.

Адк.: парабала, А – яе фокус, прамая а – дырэктрыса.

Складзіце раўнанне гэтай парабалы, пры ўмове:

1. A(2, 0). 2. A(3, 0). 3. A(4, 0). 4. A(-3, 0). 5. A(0, 2).

Змест

стар.

Вучэбнае выданне

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕАМЕТРЫЯ

Дапаможнік па адпаведнаму курсу
для студэнтаў спецыяльнасці Н0101 -
Матэматыка

Складальнік **Кірылюк** Лідзія Уладзіміраўна

Рэдактар Н.П. Дудко

Здадзена ў набор 10.09.97. Падпісана да друку 02.03.98.
Фармат 60х18/16. Папера афсетная №1.
Гарнітура Таймс. Афсетны друк.
Ум. друк. арк. 5,27. Ул.-выд. арк. 4,55.
Тыраж 100 экз. Заказ 31

Гродзенскі дзяржаўны універсітэт імя Янкі Купалы.
Ліцэнзія ЛВ № 96 ад 02.12.1997.
230023, Гродна, вул. Ажэшкі, 22.

Надрукавана на тэхніцы выдавецкага аддзела Гродзенскага
дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы.
Ліцэнзія ЛП №111 ад 29.12.1997.
230023, Гродна, вул. Ажэшкі, 22.